京都大会当日配布資料　　　　　　　　　　　　　　　　　　H21(2009).8.4(火)

重心　その面白さ　美しさ
～特に凹四角形の具体物(ブーメラン)を用いて～

神奈川県立横浜平沼高等学校　石谷優行

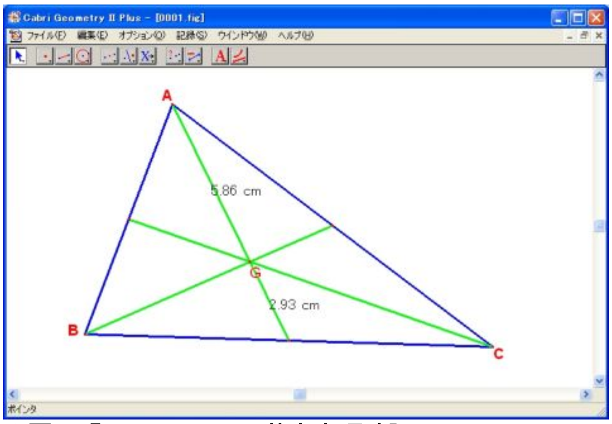
１．発表にあたって

平成１７年度の長野大会[*1)]平成１８年度の東京大会[*2)]での発表以来，１９年度の高知大会・２０年度の福島大会と，現場の多忙さもあって発表できない年が２年続いた．この間，勤務校の異動ということもあり，落ち着かない日々が続いていた．そんな中，幸運なことに，所属している横浜国立大学の研究会を通して，平成２０年度科学研究費の研究会への参加を要請された．本研究会では，「図形についての豊かな感覚・美しさを感得させる指導」が研究テーマである．私自身，ちょうど１０年前に，横浜国立大学大学院に派遣研修され，数学教育に関してのコンピュータ活用に関する修士論文を書いた．しかし，最近の授業担当というと，コンピュータに係わった仕事が多くなり，教科「情報」の免許取得の関係もあって，数学の授業を多く担当できない現状にある．そんな中，昨年度，平成２０年度は，数学Ａを担当していたこともあって，三角形の重心の指導に関して，コンピュータを用いて行うことができた．三角形の重心の指導を行ったあと，さらに発展した形として，四角形の重心の話をした．四角形の重心は，どのように求めるのかを考察し，コンピュータシミュレーションで，生徒各自がいろいろとアイデアを出し操作をして確かめていった．ここで，操作をしていくと，必ず発生するのが凹四角形であった．コンピュータシミュレーションでは，通常の凸四角形のやり方でいくと，凹四角形の重心は「無い」こととなって表示されない．しかし，考え方を少し変え，設定も変えると「有る」ことになる．例えば凹四角形と似たものの代表的なものとしての「ブーメラン」を考えた場合，クルクルときれいにブーメランが回る．その中心点は「重心」と言えないものだろうか．ブーメランが回ったり，戻ってくる様子に関しては，やはり「美しい」という生徒からの声もあがる．新学習指導要領，数学科の目標の中の「数学的活動」もふまえ，そこに関しての調査・研究を進めていきたいと考えた．

２．授業実践

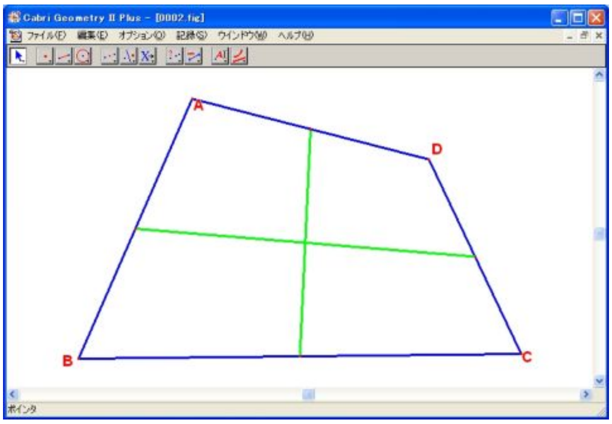
(1)三角形の重心から四角形の重心へ

まず，三角形の重心に関して確認した．ここでカブリ[*3)]の操作に関しての基本的な事項をおさえた．



▲図01「Cabri」による基本事項確認.

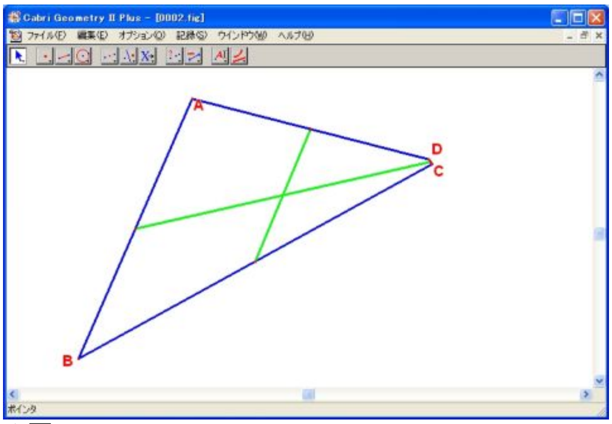
そして発展的な内容ということで，四角形の重心を考えさせてみた．もちろん，まだ一般的な凸四角形である．そこで，三角形の重心で使った中点から生徒たちがまず示したのは**図02**である．しかし，それが四角形の重心にはあたらないことが，点を動かすことによって明確になってゆく．



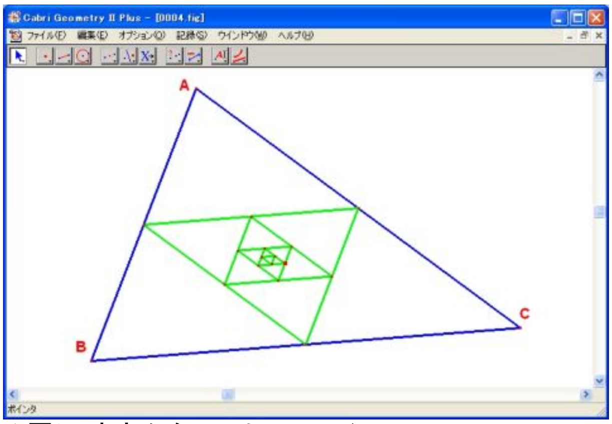
▲図02　単純に中点を結んでみる.

例えば，**図03**のように，点Ｃを点Ｄに限りなく近づけてみる．すると，交点は，三角形ＡＢＤ(Ｃ)の重心とは言えないことがはっきりする．

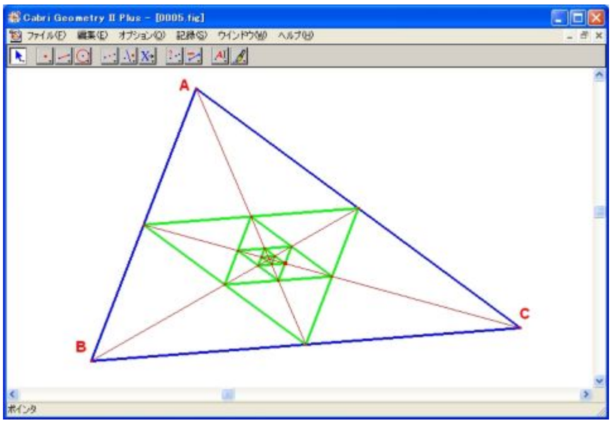
しかしここで，三角形の中点をたどっていくことで，三角形の重心に限りなく近づいていくことを，示す生徒が出てきた．それが**図04**である．



▲図03



▲図04 中点を次々にとっていく



▲図05 中線をひいてみた

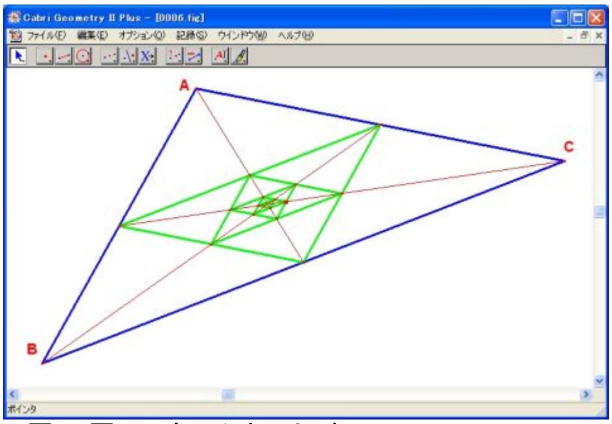
そして，確認のため中線をひいてみた．

すると，これは，三角形ＡＢＣの重心に限りなく近づいて行っている様子がうかがえる．

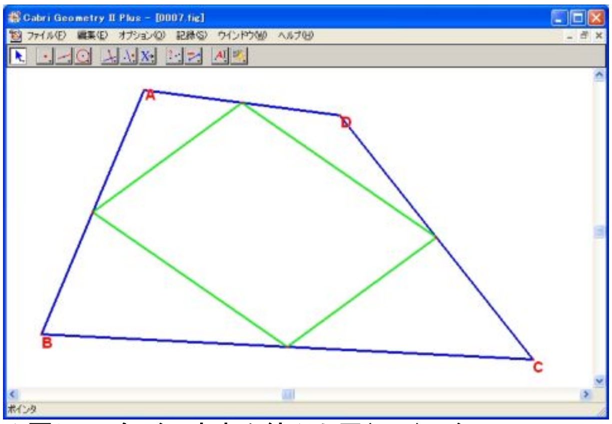
いま，ここの**図06**では，点Ｃの移動のみの図であるが，実際には，点Ａや点Ｂも移動させている．

このように，具体的に点を移動させて確かめることができるコンピュータ操作は，非常に有意義なことである．

それでは，これを四角形に応用できないかと，その生徒は考えた．



▲図06 図05の点Ｃを上にあげてみる



▲図07 四角形の中点を結ぶと平行四辺形

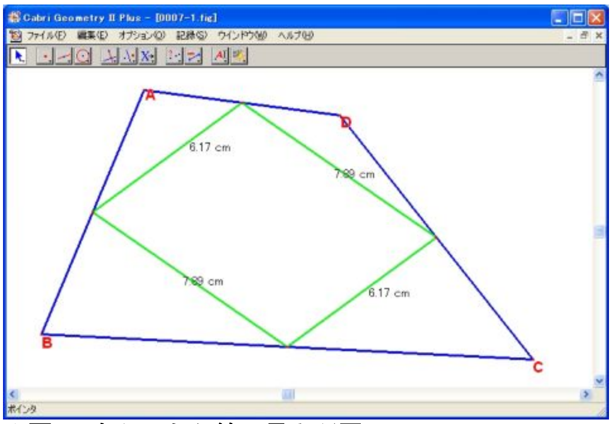
そして，四角形の中点を結んでみた．それが**図07**である．

すると，話が一瞬それるが，これだけで，平行四辺形が作られることに気づく．いや，最初は「平行四辺形らしい」であろう．

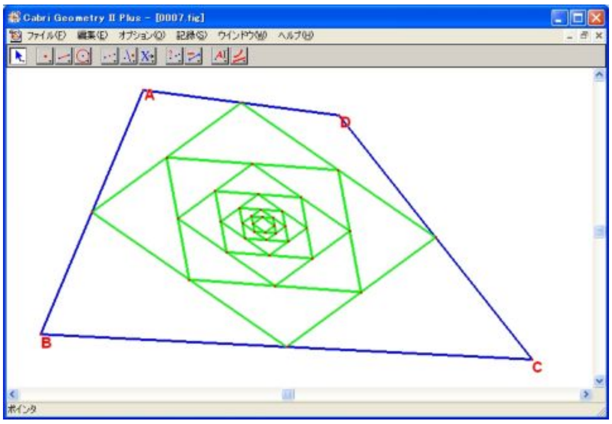
この問題は，よく見かけるものである．任意の四角形の中点を結ぶと平行四辺形ができるというものであるが，それを意識しないで出会うという現象がここで起こったことになる．もちろん，４つの点をつまんで動かしてみる．やはり，「平行四辺形らしい」という感覚が残る．そこで，４つの辺の長さを表示させてみる．もちろん，辺の長さを表示したまま，４つの点をいろいろ動かしてみる．（**図08**）

これにより，向かいあう辺の長さがいつも同じになっていることに気づき，平行四辺形であると，確認できる．これは，テクノロジーを用いたことによるひとつの発見と考えられる．

さて，**図04**では，中点を結んでいくことで，重心が出てきたが，これを四角形にも応用してみようと生徒が考えたのが，**図09**である．



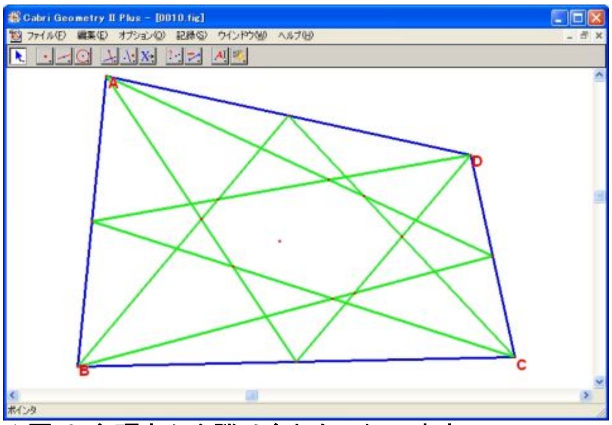
▲**図08 向かいあう線の長さが同じ**



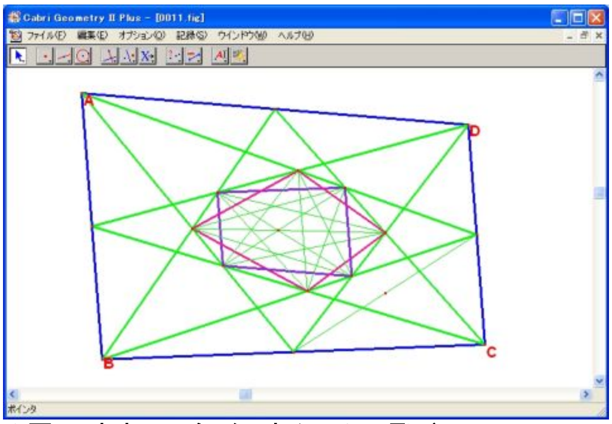
▲**図09 四角形の中点をたどっていくと**

しかし，これは，あきらかに，当初の**図02**と同じ点に限りなく近づいて行っていることとなる．

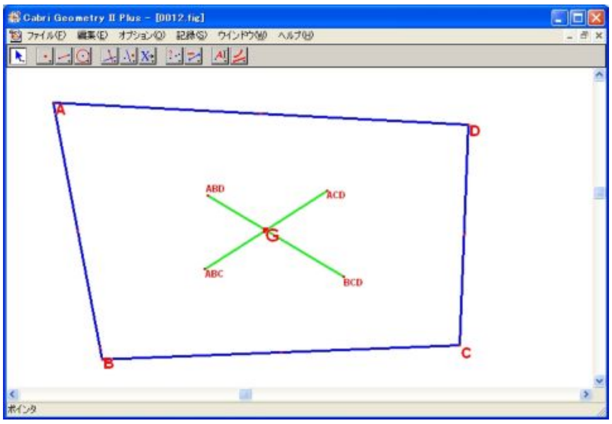
そこで，ある生徒が考えていたのが，**図10**である．いわゆる各点からは，２本，隣り合わない辺の中点に対して線が引ける．四角形の場合には，計８本の線が引けることになる．この線を用いて，四角形の重心を求められないかと考えていた．その中で，中央に発生する８つの点に着目し，ひとつ飛ばしに点を打ち，四角形を作ったのが**図11**である．これなど，実は正解の四角形の重心点が現れている面白さがある．



▲**図10 各頂点から隣り合わない辺の中点へ**

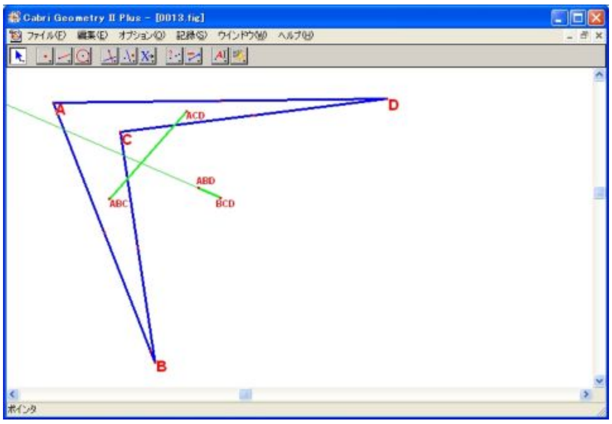


▲**図11 中央の八角形の点をひとつ飛ばしに**



▲**図12 正解の三角形の重心どおしを結ぶ**

実際の四角形の重心点が，**図12**のようであることは，みなさんご存じであろう．四角形の対角線は２本引けるが，そのそれぞれの重心を結び合った交点となる．**図11**は，偶然とはいえ，それが表現された形になっているところが面白い．コンピュータを用いての数学的活動ならではである．



▲**図13 コンピュータ操作ならではの凹四角形**

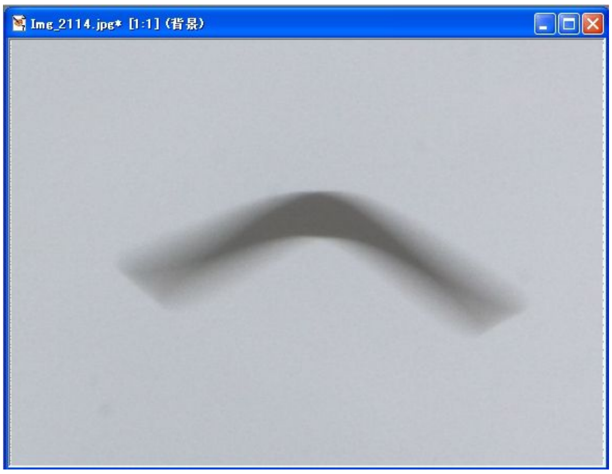
さて，コンピュータ操作によって点をつまんで動かしていくと，自然発生的に凹四角形に触れることにな

る．一般的な凸四角形での重心の考え方を，凹四角形にも拡張してみる．その際，単純に２つの三角形の重心を線分で残すといった考え方をそのまま残すと，重心と重心の線分の交点とした形となり，凹四角形の重心は出てこない(表示されない)．そこで，半直線を考え，その半直線との交点といった考え方が必要となった．凹四角形での重心は，これでほんとうによいのか．実際に試してみようと話したとき，生徒たちからあがったのがブーメランであった．

(2)四角形の重心から
具体物のブーメランの重心へ

さっそく２種類購入し校庭で投げ写真撮影をした．

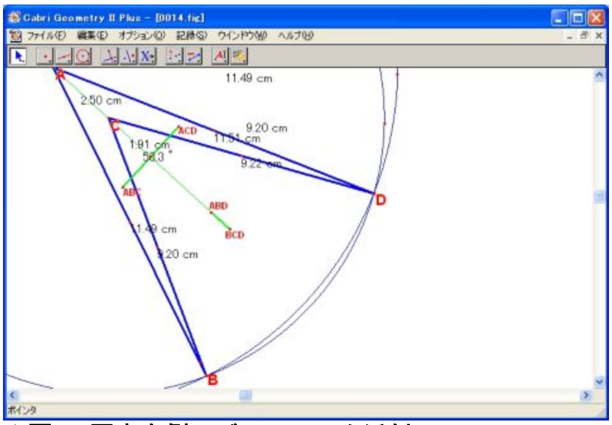
▲図14 実際に投げてみたブーメラン



▲図15 写真左側のブーメラン　回転中

写真ではなかなかわかりづらいが，目では，はっきりとある点を中心にブーメランが飛んでいる様子がわかる．そこで実際のブーメランの長さを測り，さらにカブリを使って重心の位置を出してみた．写真右側のブーメランは，重心の位置がかなり内部にある形を示している．(**図17**)　実際，**図16**の写真を見てみると，ブーメランの先端にあたる部分がよく振れている．

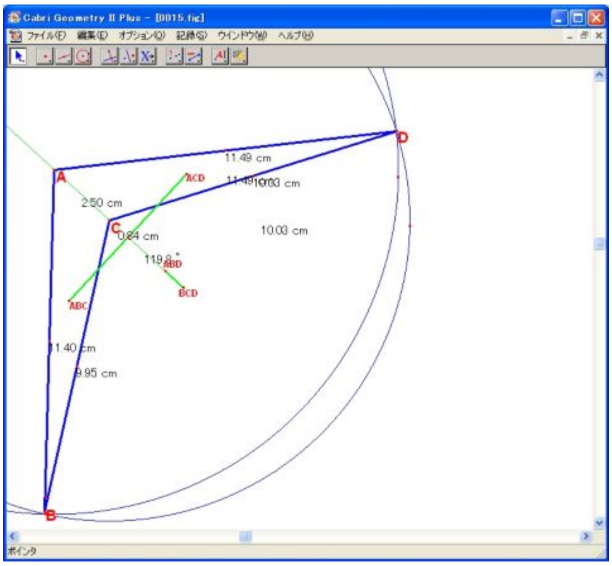
▲図16 写真右側のブーメラン　回転中



▲図17 写真右側のブーメランを近似

シャッタースピードは40分の1秒である．

また，もうひとつの写真左側のブーメランを近似してみた．すると，こちらは，重心の位置がかなりブーメランに近い位置に出ることがわかる．(**図18**)　実際，**図15**の写真ではブーメランがあまり振れていないのがわかる．このあと，筆者は，**図15・16**の写真からその重心を出してみて，カブリから算出したものとの一致するかしないかについて検討してみようと考えた．しかし，ブーメランの長さも，かなり曖昧に測ったものでもあり，中心の角度に関しても，実際のブーメランの「持つところ」はまっすぐではない．計測はかなりアバウトで行っているデータも多く，難しいのではと考え現段階においては，ここまでの考察をしていない．しかし，現実的なこととして，その数値を求める意義は充分にあると考える．また，凹四角形の研究の際，よく「コマ」での実験がある．今回は，実施はしなかったが，ブーメランよりは，はるかに実験がやりやすいと考えるので，今後実施していきたい．



▲図18 写真左側のブーメランを近似

３．おわりに

今回，「重心　その面白さ　美しさ～特に凹四角形の具体物（ブーメラン）を用いて～」というタイトルでまとめてはみたものの，生徒たちにとって，数学の美しさを感得してもらうにはどのようにしたらよいのかということを常に考え続けている．

数学の持つ不思議なこと，現象は，幾何の分野に限らず多くある．しかし，とりわけ，幾何に関しては「ああ美しい！」と感じるものが多いのではないだろうか．以下，「<発表時間が余ったら>カブリでの感激．」のところでも書いているように，コンピュータ等テクノロジーを用いた場合，不思議な現象を，知らずのうちに自ら操作することがある．そしてそこから，「なぜ」が生まれ，「確かめ」，そして理論的に考察していくといった「帰納」から「演繹」へという思考を今後も推進していきたいと考える．吉田明史氏(2009)も「コンピュータ活用のよさをもっと財政当局」に伝えることが必要ではないかとしている．

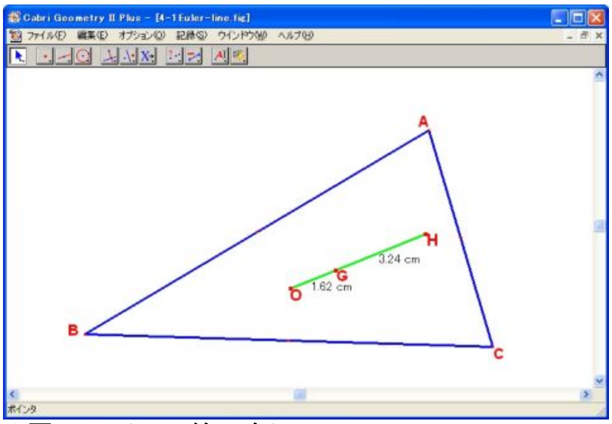
４．おわりのおわりに

＜発表時間が余ったら＞カブリでの感激．

（１）いわゆるオイラー線に関して

「三角形ＡＢＣの垂心をＨ，重心をＧ，外心をＯとすると，ＨＧ＝２ＧＯ」

『幾何への誘い』，小平邦彦，岩波現代文庫，P. 94

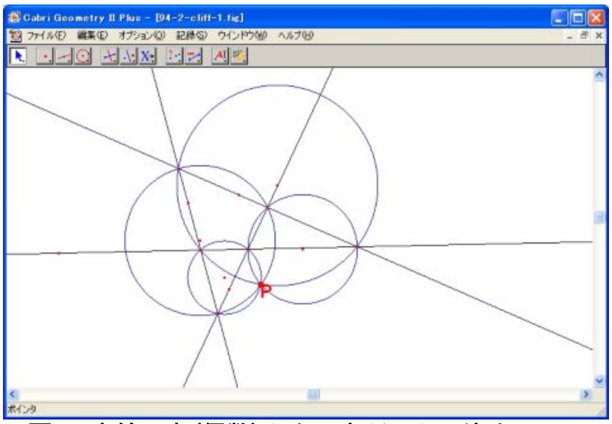


▲図19 オイラー線の確かめ

オイラー線をただ確かめるに留まらず，点Ａをつまんで，左右に辺ＢＣに平行に動かした時の，垂心（H）と外心（O）の動きに関しては，誰もが「あれれ！！」となることでしょう．

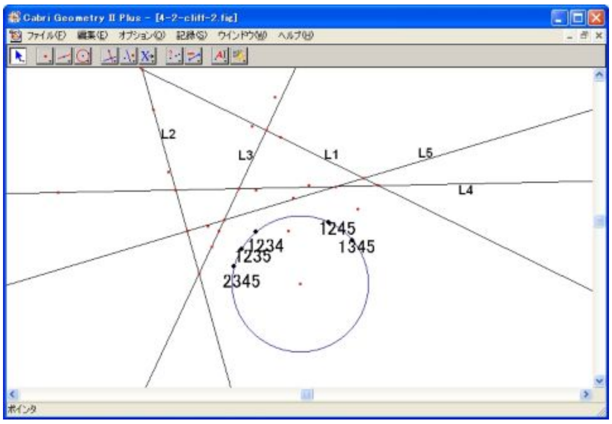
（２）クリフォードの定理の確かめ

「奇数個の直線は円を決定し，偶数個の直線は点を決定する．」『春宵十話』，岡潔，光文社文庫，P. 23



▲図20 直線４本（偶数）から，点がひとつ決まる

直線が４本あるので，そこから３本を選ぶとすると，それは４通り．選ばれた３本で外接円を４つ描くことになるが，不思議なことにその４つの外接円が一箇所で交わる．



▲図21 直線５本（奇数）から，円がひとつ決まる

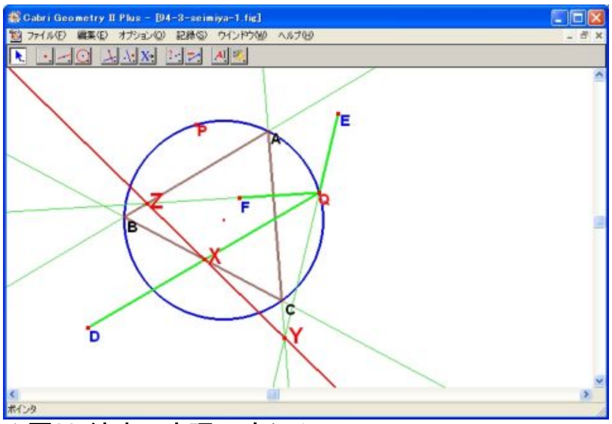
図21は，図20に，もう１本加えて５本にしてみたところ．図21の「1234」の点とは，図20のように「L1」「L2」「L3」「L4」から決定された点の意味．
すると，直線が５本なので，「1234」「1235」「1245」「1345」「2345」の５つの点ができるが，これがなんと不思議なことに同一円上にあるというもの．コンピュータで作ってもかなり大変であった．（位置をうまくしないと，円にはなってはいるものの，キレイに円が表現できない．）

これを，紙と鉛筆，定規とコンパスでやったということ自体に脱帽であった．

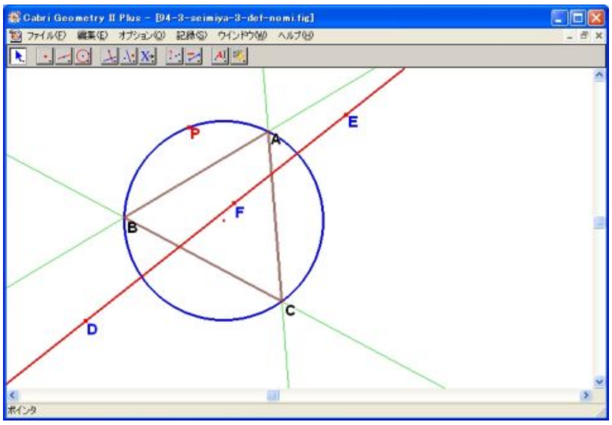
(３)清宮の定理の中での発見

「三角形ＡＢＣの外接円周上の任意の２点をＰ，Ｑとし，ＰのＢＣ，ＣＡ，ＡＢに関する対称点をＤ，Ｅ，Ｆとし，ＱＤ，ＱＥ，ＱＦがＢＣ，ＣＡ，ＡＢと交わる点をそれぞれＸ，Ｙ，Ｚとすれば，Ｘ，Ｙ，Ｚは同一直線上にある．」

『初等幾何のたのしみ』，清宮(せいみや)俊雄，日本評論社，P.12　(清宮先生が高2で発見したという)



▲図22 清宮の定理の確かめ



▲図23　最初のＤ,Ｅ,Ｆのみで，もう並ぶ

なんと，「三角形ＡＢＣの外接円周上の任意の２点をＰ，Ｑとし，ＰのＢＣ，ＣＡ，ＡＢに関する対称点をＤ，Ｅ，Ｆとし」の部分のみで一直線にならんでしまう！！まさに，不思議さは美しいと感じる．

５．最後に

筆者ホームページ(http://www.ishitani.com)ともども，御覧いただき，御意見等いただければ幸いです．よろしくお願いいたします．

Ｅ－Ｍａｉｌ　masayuki@ishitani.com

＊１）長野大会
私流！GRAPESを授業で用いる際の「ツボ」や「コツ」
～ホームページhttp://grapes.jpを用いて
　主に数学Ⅰ・Ａの授業に焦点をあてて
＊２）東京大会
私流！GRAPESを授業で用いる際の「ツボ」や「コツ」
～ホームページhttp://grapes.jpを用いて
　主に数学Ⅱの授業に焦点をあてて
上記２つとも，「**http://grapes.jp/**」にて読めます．
＊３）カブリの評価バージョン（３０日間制限なし）
「http://www.naoco.com/cabri/download/」
ただし，英語版です．

引用文献

吉田明史(2009)，「高等学校の数学教育に求められるもの」．日本数学教育学会誌．2009 第91巻 第7号 p.19

小平邦彦，「幾何への誘い」，P.94，岩波現代文庫

岡潔，「春宵十話」，P.23，光文社文庫

清宮俊雄，「初等幾何のたのしみ」，P.12，日本評論社

尚，本研究は，平成２０年度科学研究費補助金(基盤研究(Ｃ),研究課題番号20500749)の研究助成を受けて進められた．