GRAPESの私なりの「ツボ」
～「数学Ⅰ」の2次関数に焦点をあてて～

石谷　優行

神奈川県立神奈川総合高等学校教諭
専攻　数学教育
個人サイト：http://ishitani.com
http://grapes.jp（GRAPES専用）
メールアドレス：masayuki@ishitani.com

1　はじめに

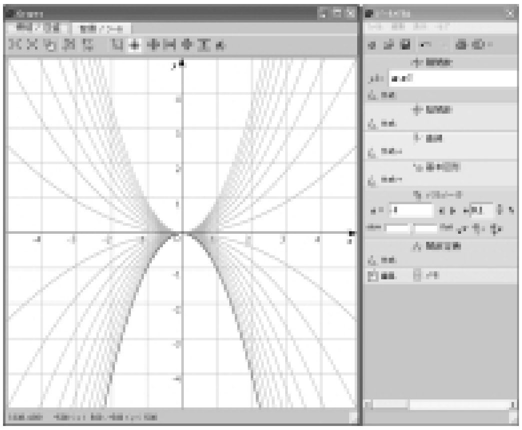
GRAPES（大阪教育大学附属高校池田校舎友田勝久教諭作）は，使えば使うほど「味」のあるソフトです。ちょっとしたアイデアで生徒たちに「動的シミュレーション」を通し関数のもつすばらしさを伝えられます。すでに多くの先生方が使う上で注意を払っているはずですが，以下私なりの「ツボ」を公開したいと思います。ぜひ，本誌を見ながら同様に操作を行ってみてください。なお，本原稿は，文英堂の数学教科書『高等学校新編数学Ⅰ』（教科書番号014）を参考に書いています。文中に「教科書 p.○○」と出てきた場合は，そのページの内容を扱っております。（一部，『高等学校数学Ⅰ』（教科書番号013）の内容も扱っています）

2　具体的な実践

（1）2次関数のグラフ

●$y=ax^2$ のグラフ（教科書 p.48）

ここは，そのままGRAPESに $y=ax^2$ と入れ，a の変化によって，グラフの広がり具合が変化することを実感させましょう。a を変化させれば，ごくごく当たり前のことですが，グラフの広がり具合が変化するということを，生徒たちは「知識」でもっていても，やはり「動的シミュレーション」で見るのとでは，大きく違います。生徒たちは，ここで初めてGRAPESの画面を見ることになると思います。「動的シミュレーション」のすばらしさを感得させてあげてください。

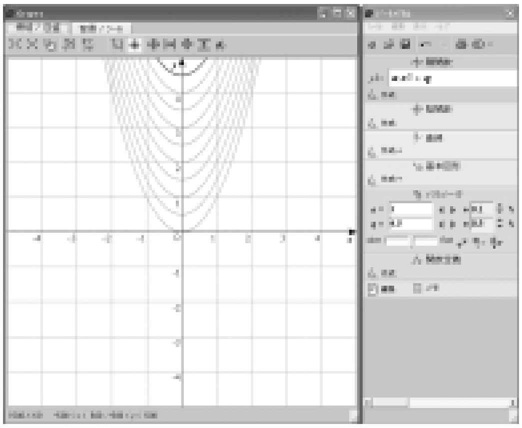


（図１）

図１では，パラメータ a を+1から－1まで変化させています。a がプラスの時が下に凸，a がマイナスになると上に凸，そして a が０のとき，横一直線の $y=0$ のグラフになる点に着目させることができます。

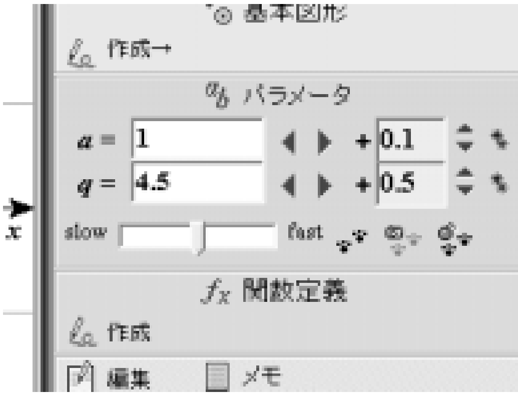
●$y=ax^2+q$ のグラフ（教科書 p.49）

ここも，そのままGRAPESに $y=ax^2+q$ と入れて q の変化によって，グラフが上下することを実感させましょう。



（図２）

図２は，パラメータaは+1のまま固定しqを０から +4.5 まで変化させたところです。なお，ここではqのパラメータの変化の割合を0.5にしておくことをお勧めします。0.1のままでもいいのですが，生徒たちが頂点のy座標を読みやすくするためです。



（図３）

図３は，パラメータのqだけ，変化の割合を+0.5としたところです。

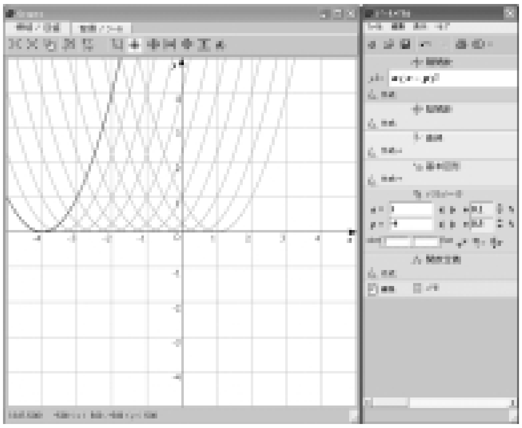
●$y=a(x-p)^2$のグラフ（教科書 p.50）

ここは，教科書を説明したのち，GRAPESを用いるわけですが，平行移動の観点から，$y=a(x-p)^2$と式をおいて説明するのは良いとしても，慣れてきたところでは，$y=a(x+p)^2$とpの前をプラスにして，GRAPESでいろいろと操作することをお勧めします。この後，$y=a(x-p)^2+q$の形が出てくるわけで，生徒たちにとっては，例えば，$y=2(x+3)^2+4$の頂点などを求めることになります。

その際，最初から$y=a(x-p)^2$とおくと，どうも$(x+3)^2$の中の+3を$-(-3)$にはしづらいようです。

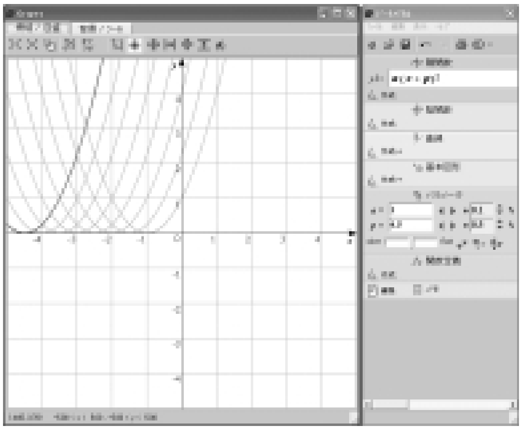
$y=a(x+p)^2+q$とおくところから，頂点のx座標は$+p$の符号を逆にしたもの，また，頂点のy座標は$+q$そのものという発想が見えてきます。

また，ここのところも，pのパラメータの変化の割合は，0.5にしたほうが，生徒たちが頂点のx座標を読みやすくなると考えます。



（図４）

図４は，$y=a(x-p)^2$とおいてpを +1 から0.5ずつ下げ，-4まで変化させたところです。



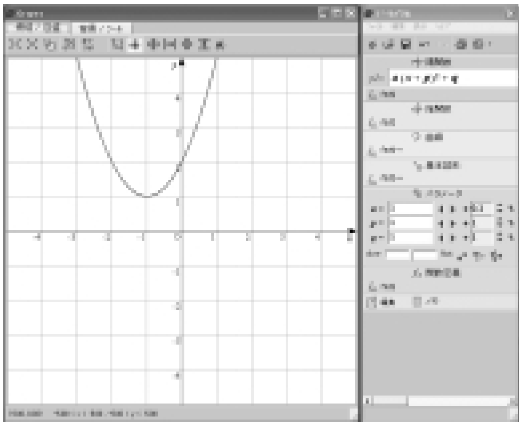
（図５）

図５は，$y=a(x+p)^2$とおいてpを +1 から 0.5ずつ上げ，+4.5 まで変化させたところです。

図４と図５を比べてみれば，どちらが生徒たちにとって自然かということです。とくに，図５では$+p$となっていて，さらにpそのものの値もプラスなのに，グラフの頂点はどんどん左へ動いていってしまうという実感を得ることができます。ここに，頂点のx座標は，$+p$の数値の符号を逆にしたものという感覚が芽生えます。ここが単に「教え込み」の授業とは違う，「実感を伴う良さ」です。

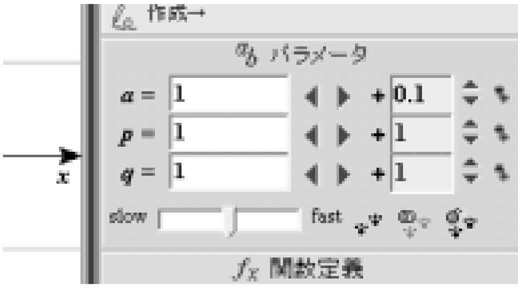
●$y=a(x-p)^2+q$ **のグラフ**（教科書 p.51）

ここでも，すでにお話しているように下の図６のように $y=a(x+p)^2+q$ とおいてみます。

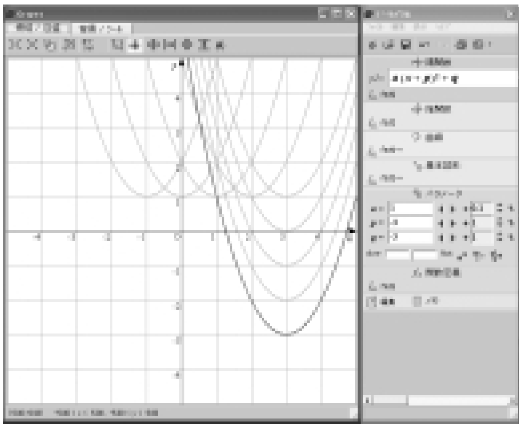


（図６）

そして，ここでは p や q の変化の割合を +1 にしています（図７）。ここが「ツボ」です。



（図７）



（図８）

そして，ここでは，まず p を変化させます。p が初期値 +1 になっているので，頂点の x 座標が −1 になっているのがわかります。ここから，p を１ずつ下げ，0，−1，−2，−3 と変化させます。数値が下がれば下がるほど右に動いていくのが実感されます。p が −3 まで行きましたら今度は，q を１ずつ下げ，0，−1，−2，−3 と変化させます。こちらは，数値の変化と上下の感覚が同じなので実感を伴いやすいでしょう。最終的に止まったのが図８です。

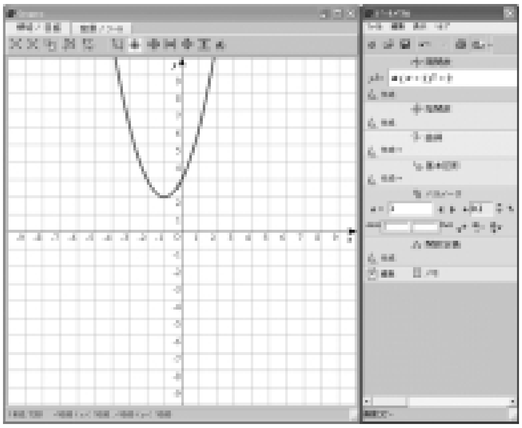
(2) 2次関数のグラフの決定

例えば，次のような例題があります。

「頂点が点(−1，2)で，点(1，6)を通る２次関数を求めよ。」（教科書 p.54 例題５(1)）

これなどは，GRAPES で実際にやってみると，「なるほどそうなんだ」という実感が湧いてきます。

「頂点が点(−1，2)で」から，下の図９のように，$y=a(x+1)^2+2$ とおいてみます。

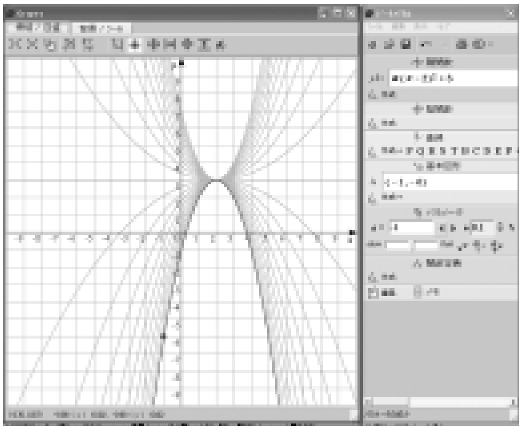


（図９）

そしてグラフの表示範囲は，いつもの（x，y とも，−5から+5）ではなく，(x，y とも，−10 から+10）にしてます。(1，6)のためです。

そして，a を変化させようとしてみます。しかし，なんとこのままで「点(1，6)を通る」状態

になっています。a の初期値は１ですから，すぐに答えは，$a=1$ ということが見て取れます。通常の授業では，何気なく，$y=a(x+1)^2+2$ の x に1，y に６を代入して計算し，a を１として決定すると思います。しかし，それが「どういうことなのか」という点が重要であり，例えば本来，a の値がマイナスになるところを「計算ミス」してプラスの数値が出たときに，「あれ？おかしいな」と思うかどうかが，大きな違いとなって出てくると考えます。例えば，「点(2，3)を頂点とし，点(−1，−6)を通る放物線の方程式を求めよ。」(『高等学校数学Ⅰ』p.61 例題１)なども，明らかに a はマイナスとなります。



(図10)

図10では，まず点(−1，−6)を表示して「ここに，たどり着くよう」に考えさせています。a がマイナスである必要性を感じさせ，実際に a を動かして点(−1，−6)に着いたところです。このとき a の値を見てみると−１になっているのがわかります。

(3) $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例えば，次のような問いがあります。

「２次関数 $y=-2x^2+4x+3$ の最大値または最小値を求めよ。」(教科書 p.57 問12(2))

最大値・最小値に関しては，後述しますが，

一般形　$y=ax^2+bx+c$

から

標準形　$y=a(x-p)^2+q$

に式変形するところです。教科書では，サラっと変形していますが，ここは，ぜひとも，a，b，c そして p，q を用いて「別々に」式を作ってください。

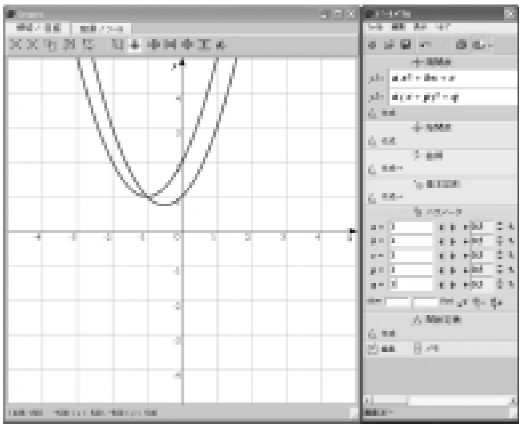
$y\mathbf{1}=ax^2+bx+c$

$y\mathbf{2}=a(x+p)^2+q$

そして，a，b，c または p，q を動かすことによって，グラフが一致する楽しさを表現してみてください。グラフの色を変えると効果的です。

なお，ここでもこだわるようですが，$(x-p)^2$ ではなく $(x+p)^2$ としてください。それにより，p のところに入る数字とグラフの位置関係がはっきりしてくると思います。

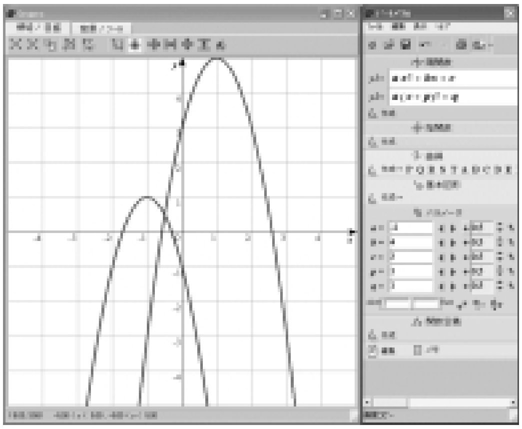
ところで，GRAPES では，「陽関数」の $y\mathbf{1}$ や $y2$ をクリックすると，一時的にグラフが消えてくれます（正確には「非表示」と言います)。この機能をうまく使って，式変形「する前」と「した後」が一致するおもしろさを体験させてみてください。



(図11) $y\mathbf{1}=ax^2+bx+c$，$y\mathbf{2}=a(x+p)^2+q$ **と入力**

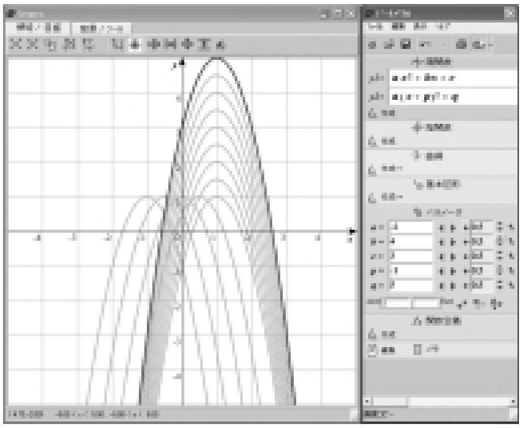
図11の p が +1，q も +1なので, 頂点が, (−1, 1)にあることに気づきます。また，グラフ移動の増加量は，初期値の 0.1 より 0.5 にしておいたほ

うが動きが効果的と考えます。



（図12）

図12では，問題文のとおり，aを-2，bを$+4$，cを$+3$にしたところです。とにかく，GRAPESは，直感でイメージが湧くというか，もう図12を見ただけで，左のグラフを右に重ねるわけですから，どこをどう動かせばよいかということが見えてきます。



（図13）

図13は，平行移動を完了させたところです（実際の授業場面では，残像にはしません）。これにより，p，qを読みとると，平方完成のp，qの値が解ったことになります。「$y=ax^2+bx+c$のbの値を半分にして，それを２乗して後ろへくっつけ…」という計算スキルの向上もおおいに大切です。しかしながら，それがどういう「意味」をもつかということも，非常に大切なことです。

また，次のような例題があります。

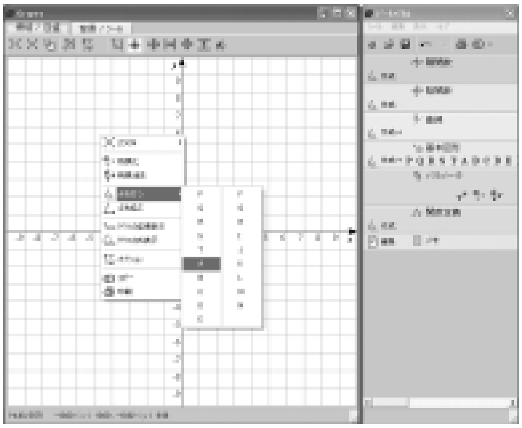
「3点(1，−3)，(3，−1)，(−2，9)を通る放物線の方程式を求めよ。」（教科書p.55例題６）

作者である大阪教育大学附属高校池田校舎の友田勝久先生の御努力には，ほんとうに頭が下がります。メーリングリストで，GRAPESへの要望が出ると，それこそ寝食を忘れて対応してくださいます。その１つにpathという関数を作っていただいたということがございます。pathという関数は，『GRAPESパーフェクトガイド改訂新版』のp.127にその解説があります。

path$(x,P_1,\cdots,P_n)$

与えられたn個の点を通る$(n-1)$次関数

では，さっそくこの関数を使ってみたいと思います。まずは，点を打つことから始めます。３点(1，−3)，(3，−1)，(−2，9)と指示されているのできちんと打たないと…と感じますが，ここがGRAPESのすごいところです。グラフ上で，右クリックすることで，点を打て，あとから自由に移動ができるのです。



（図14）

図14は，右クリックして点Aを打っているところです。点を打つだけでなく，右クリックで，様々なことができるのがわかります。

図15は前ページの図14の拡大図です。

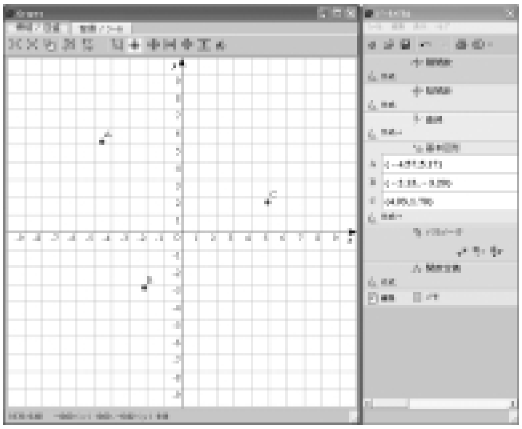
図16は前ページの図14を繰り返して任意の点を3点を打ったところです。そして，各点をドラッグすると，点を移動できます。このときに「CTRL」キーを押しながらドラッグするのが「ツボ」です。すると，格子点（x，yの値とも整数値）のみの移動となり，容易に問題文に出された３点への移動が完成します。

図17は「CTRL」キーを押しながらドラッグして３点を問題文のとおりに移動させたところです。

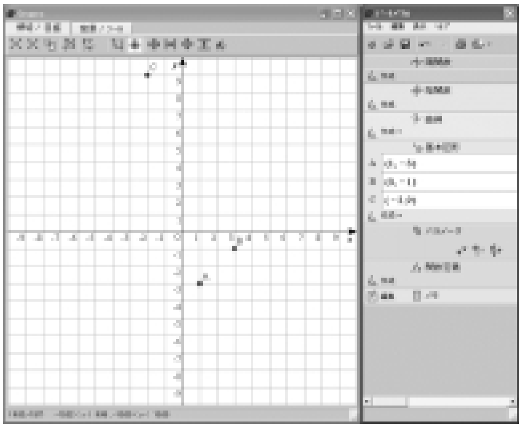
次に，友田先生が作ってくださったpath関数を入力します。

いつもどおり「陽関数」の「作成」のところをクリックして入力します。

図18はpath関数を入力しているところです。今回は，変数はxであり，3点をA，B，Cとしましたので，path(x,A,B,C)と入力するだけです。

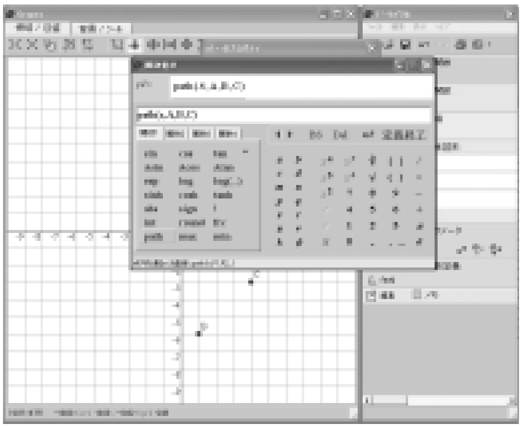


（図16）

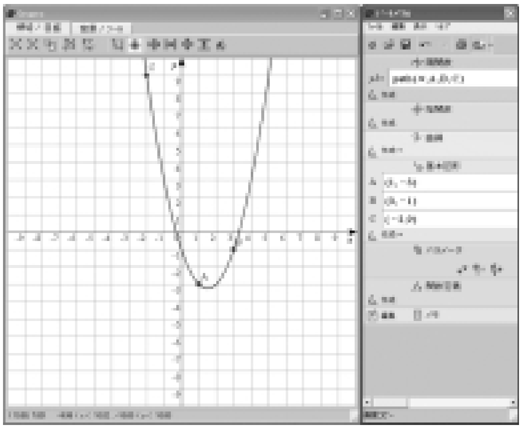


（図17）

（図15）



（図18）



（図19）

図19でpath関数を入力し終えました。すると，今回は「3点」でしたので，(3−1）次関数，すなわち2次関数が現れました。

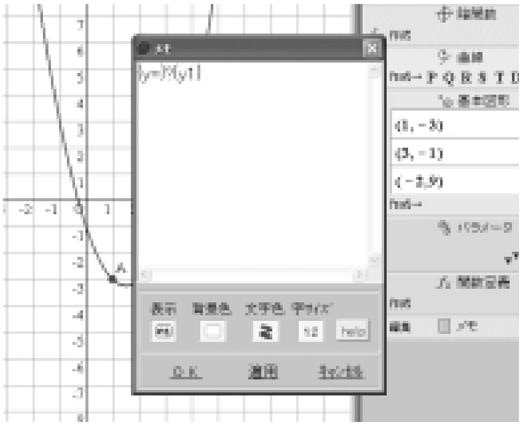
ここで，「グラフは出てきたものの，式を表示する機能はないものか」と考えていますと，これも友田先生はしっかり作ってくださっています。画面右下の「メモ」というところ（図20）に御注目ください。

（図20）画面右下の「メモ」

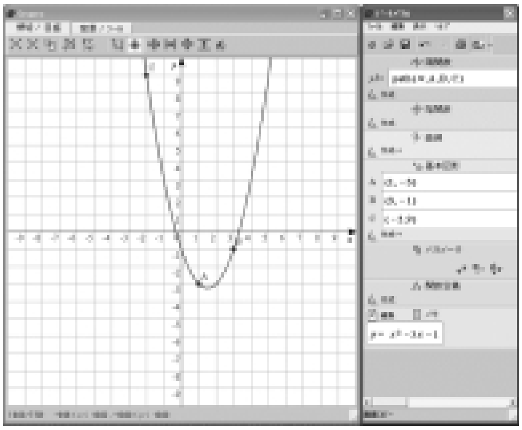
ここの「編集」をクリックします。そして「{y=}?{y1}」と入力します（図21)。

そして「OK」を押しますと，右下にこのグラフの式が表示されます（図22，23)。

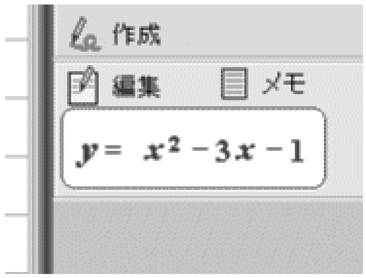
メモの記述方法に関しては，非常に様々なことが書けるように設定してくださっています。しかし，最初から難しいことに取り組むのではなく，とりあえず，これだけ記入してみてください。詳しくは，『GRAPESパーフェクトガイド改訂新版』や，「ヘルプ」を参照してください。すばらしい内容です。



（図21）「メモ」を編集中



（図22）



（図23）図22の画面右下の拡大図

さて，さきほど，点A，B，Cの各点をドラッグで移動できると書きました。この時点で，ドラッグしてみると，どうなるでしょう。これもわかりやすいように「CTRL」キーを押しながら「格子点」で移動させてみます。

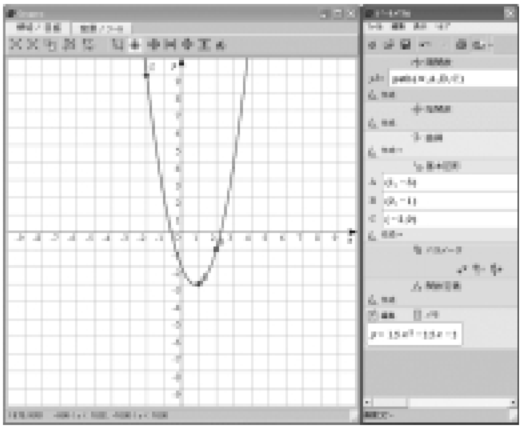
ここで，非常におもしろいことを生徒たちに示すことができます。点B(3，−1)を，左に1つずつ移動させてみるのです。

図24は，点Bを左に1つ動かして(2，−1)としたところです。点Bと点Aが接近したため，開き具合を示すパラメータaの数値が図23の時よりも大きくなっているのがわかります。

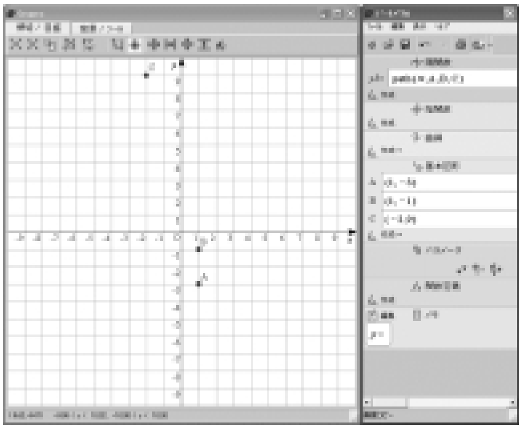
図25は，点Bを左に1つ動かして(1，−1)としたところです。点Bと点Aが縦に1直線になったため，2次関数が成り立っていないことが示されています。生徒たちに，「なぜ表示されないのか」という確認が行えます。

図26は，点Bを左に1つ動かして(0，−1)としたところです。点Bと点Aが縦に1直線にならなくなったので，再び2次関数が成り立ち始めた様子が示されています。

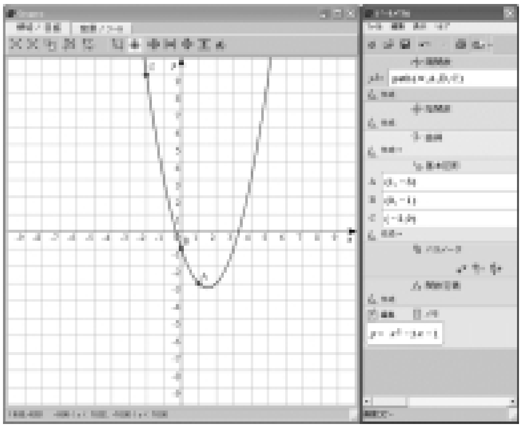
図27は，点Bを左に1つ動かして(−1，−1)としたところです。点Bと点Cのx座標が近づいたため，「鋭いグラフ」(aの値が大きい)に，なっているのがわかります。



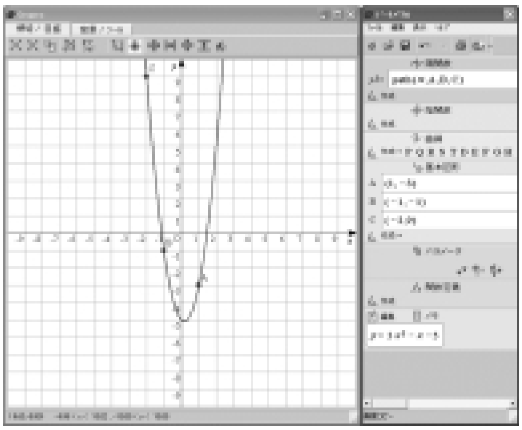
(図24)



(図25)



(図26)



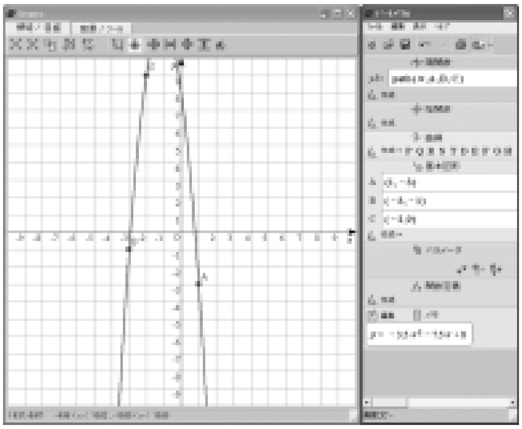
(図27)

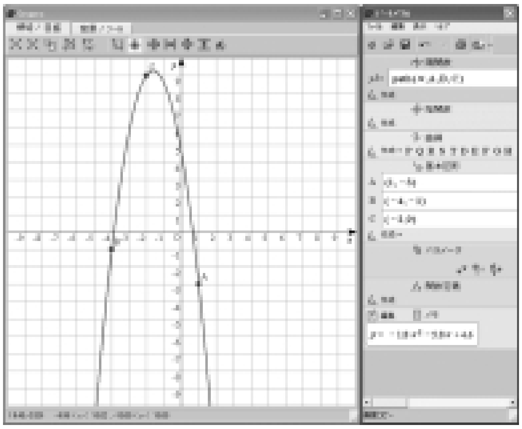
図28は，点Bを左に１つ動かして（−2，−1）としたところです。また，ここでも，図25同様，点Bと点Cが縦に１直線になったため，２次関数が成り立っていないことが示されています。

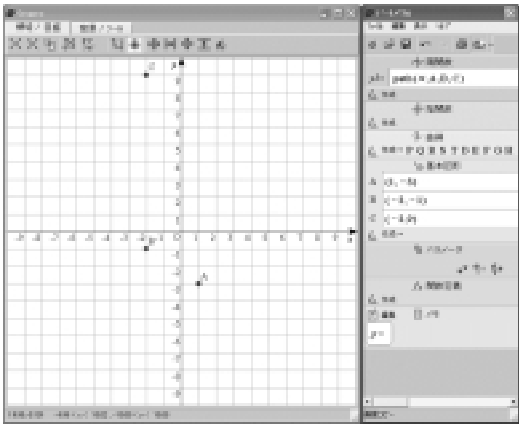
図29は，点Bを左に１つ動かして（−3，−1）としたところです。突如，開き具合を示すパラメータaの数値がマイナスになりました。確かに，考えてみれば，点A，点B，点Cを結ぶと「上に凸」の２次関数しか考えられません。しかし，こうやって位置関係から突然現れたものに生徒たちはけっこう驚きを感じるものです。

図30は，点Bを左に１つ動かして（−4，−1）としたところです。点Bと点Cのx座標が離れていくため，グラフの「鋭さ」が，図29に比べて減ってきています（パラメータaの絶対値の値が小さくなってきています）。

図31は，点Bを左に１つ動かして（−5，−1）としたところです。点Bと点Cのx座標がさらに離れたため，さらにグラフの「鋭さ」が減ってきています（パラメータaの絶対値の値が小さくなってきています）。


（図29）


（図30）


（図28）

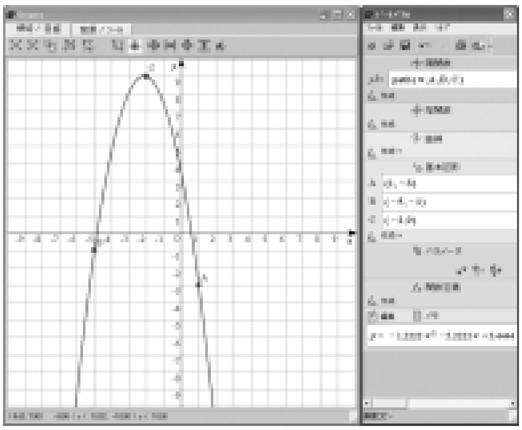

（図31）

図32は，点Bを左に1つ動かして（−6，−1）としたところです。

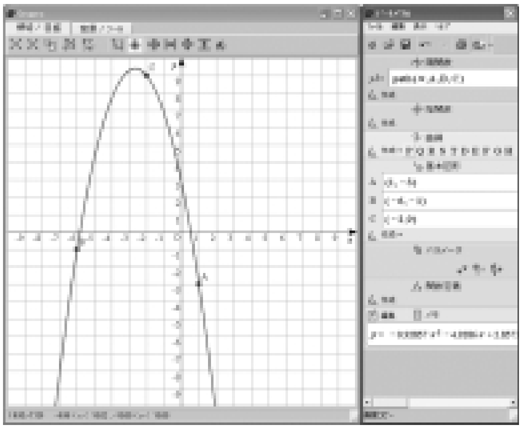
図33は，点Bを左に1つ動かして（−7，−1）としたところです。

図34は，点Bを左に1つ動かして（−8，−1）としたところです。

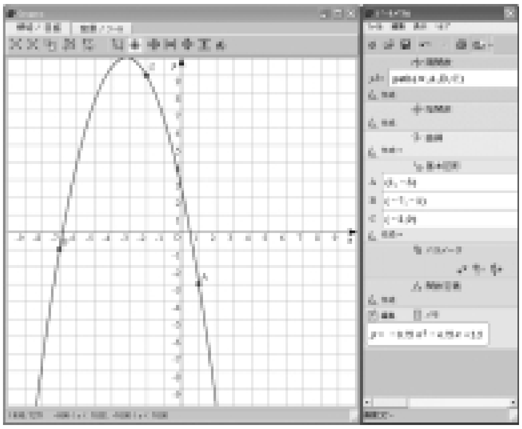
図35は，点Bを左に1つ動かして（−9，−1）としたところです。

図36は，点Bを左に1つ動かして（−10，−1）としたところです。

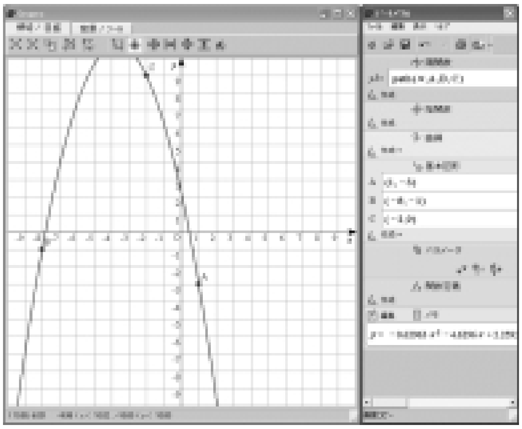
以上，図32からは，点Bと点Cのx座標がどんどん離れていき，グラフがどんどん開いていく様子がうかがえます。



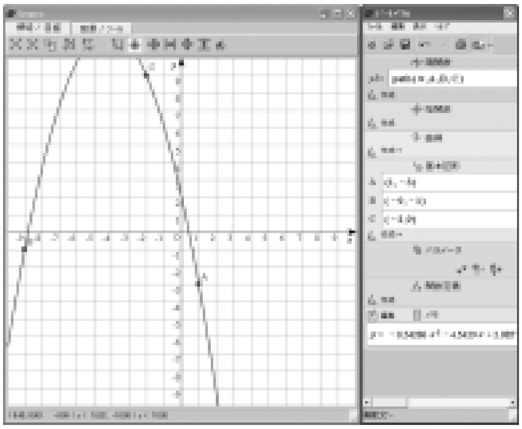
（図32）



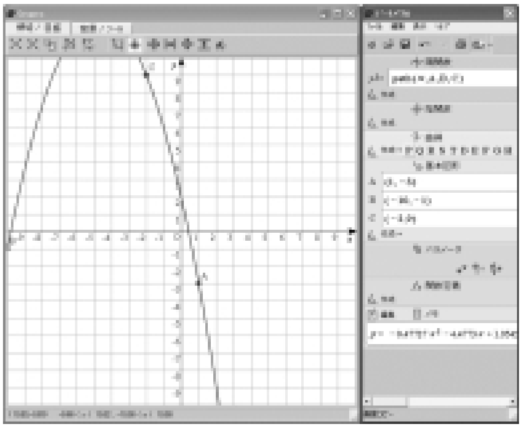
（図33）



（図34）



（図35）



（図36）

この「変化の様子」などは，まさに，黒板とチョークだけの授業では，表現できないものです。とくに，図29で，それまで「下に凸」のグラフだったのが，いきなり「上に凸」のグラフに変わるところは，授業の中としても，非常に大切なポイントと言えます。

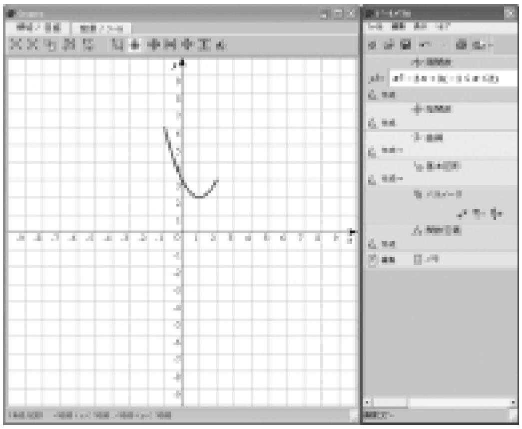
●定義域に制限のある２次関数の最大・最小

次のような例題があります。

「定義域を$-1 \leqq x \leqq 2$とするとき，2次関数$y=x^2-2x+3$の最大値と最小値を求めよ。」

（教科書 p.57 例題７）

ここも，そのままGRAPESの「陽関数」に$y1=x^2-2x+3\,(-1 \leqq x \leqq 2)$と入れればグラフは示されます。



（図37）

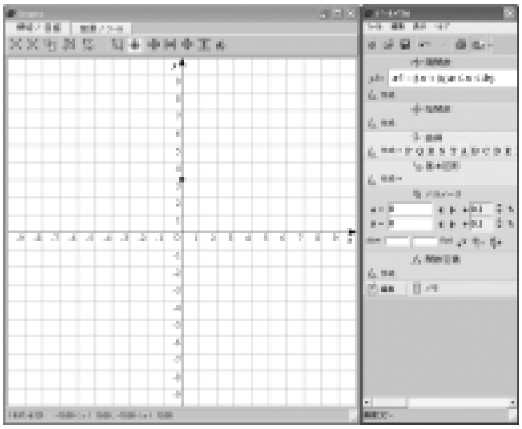
図37は，$y1=x^2-2x+3\,(-1 \leqq x \leqq 2)$そのものです。

しかし，これでは，部分的なグラフが示されるだけで，その全体像は見えてきません。

ここでも，教科書どおり，定義域を数値にしないで，$a \leqq x \leqq b$と文字（パラメータ）で入れてみるのです。

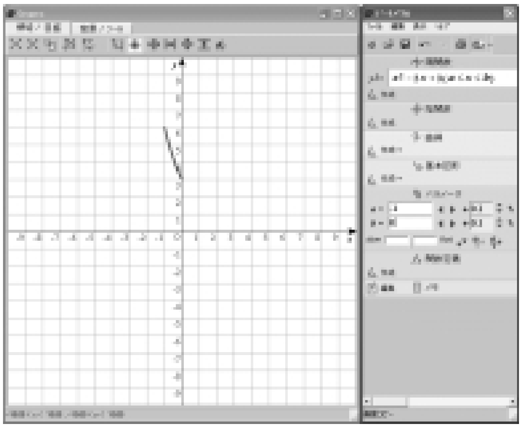
すると，aやbのパラメータの値を変化させることで，グラフが，「にょきにょき」と「はえてくる」のです。ここがおもしろいのです！！

これにより，頂点を通過しているか否かの判定の意味を，生徒たちは捉えられやすくなります。ここは，大きなポイントと言えます。



（図38）

図38は，$y1=x^2-2x+3\,(a \leqq x \leqq b)$と，したところです。$a$，$b$の初期値はGRAPESではそれぞれ１なので，この場合，$x=1$が頂点となる関係が明らかになってしまいますので，わざと初期値を０にしておきましょう。ここがコツです。そして最初は単に「点」にしかなっていないところに着目です。



（図39）

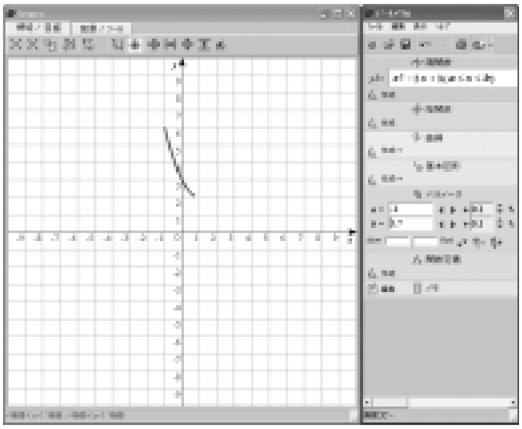
図39は，パラメータaを問題文どおり-1としたところです。最初の値０から0.1刻みに数値が減るたびごとに，グラフが「にょきにょき」

とはえてくるところが非常におもしろみを感じるところです。

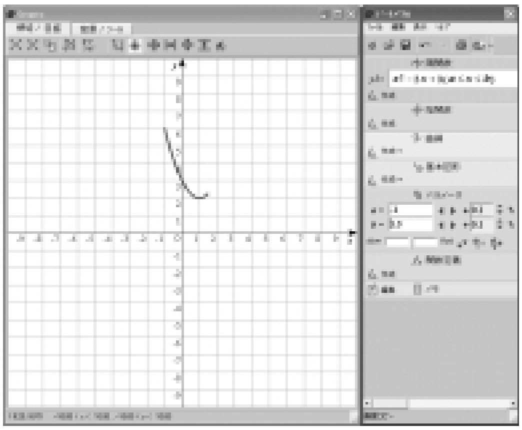
図40は，パラメータbを問題文の2にすべく値を増やしているところです。この時点 $b=0.7$ では，まだ頂点は見えません。

図41は，引き続き，パラメータbを問題文の2にすべく値を増やしているところです。この時点 $b=1.5$ まで変化させると，$x=1$ のところに頂点があることがはっきりしてきます。

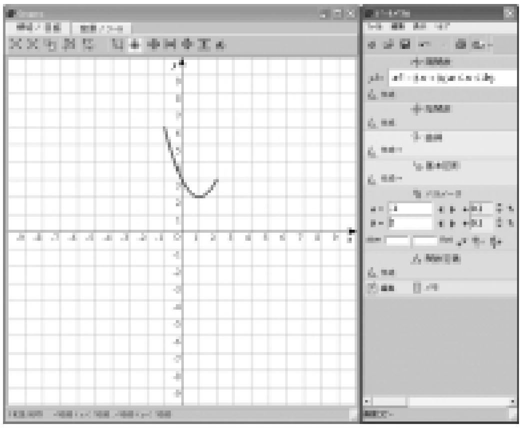
図42は，パラメータaを -1，bを2にしたところです。これで図37と同じになったわけですが，たどった経過としては，こちらのほうがかなり効果的であると考えます。



（図40）



（図41）



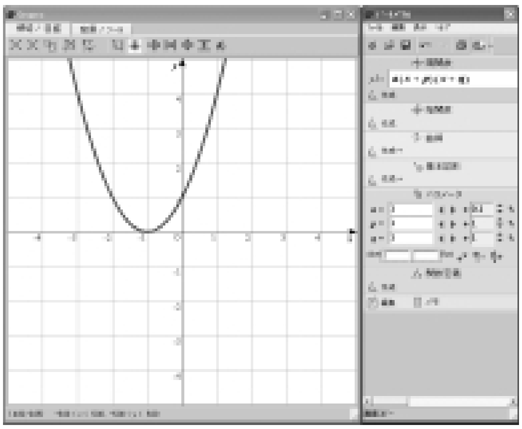
（図42）

● 2次関数のグラフとx軸の共有点

（教科書 p.62）

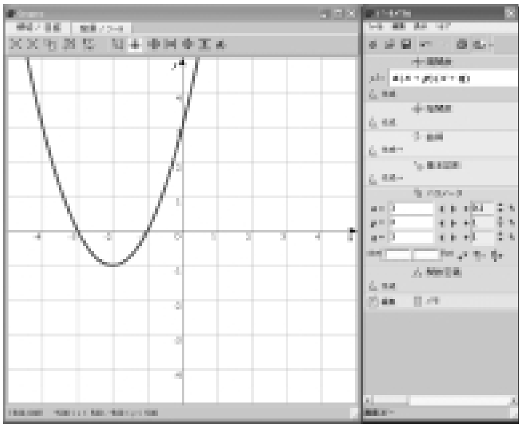
ここも，いろいろなやり方ができますが，とにかく，まず，$y=(x+p)(x+q)$ のグラフの動きを見せましょう。前述しましたように，$y=(x-p)(x-q)$ としないところがポイントです。

図43は，$y1=a(x+p)(x+q)$ としたところです。p，qの各パラメータの初期値が1なのでこう表示されます。なお，増加量は，0.1でなく，1にしたところがコツです。そしてとにかく，まずpだけをいろいろと動かしてみましょう。すると，qの点が動かない（pをいくら動かしても，



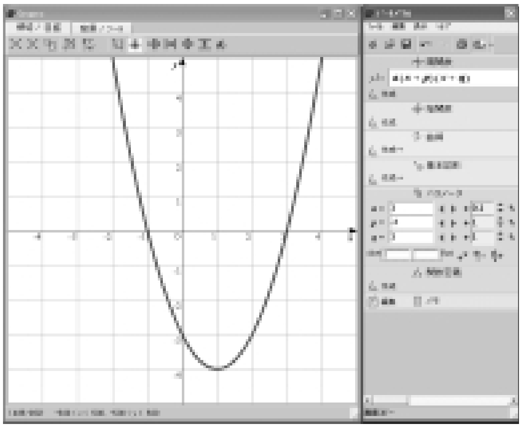
（図43）

必ずqの位置にある）ことが，見えてくると思います。



（図44）

図44を見てみるとpが3，qが1となって，x軸とはそれぞれ-3，-1で交わっているのがわかります。これも，$y=(x-p)(x-q)$とはせずに，$y=(x+p)(x+q)$とおいた関係から考察する意味で重要なポイントとなります。

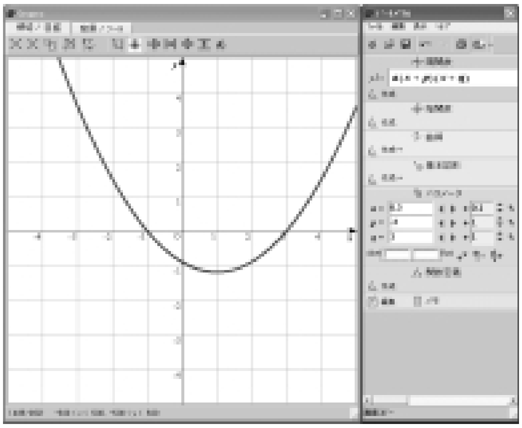


（図45）

図45を見てみるとpが-3，qが1となって，x軸とはそれぞれ3，-1で交わっているのがわかります。

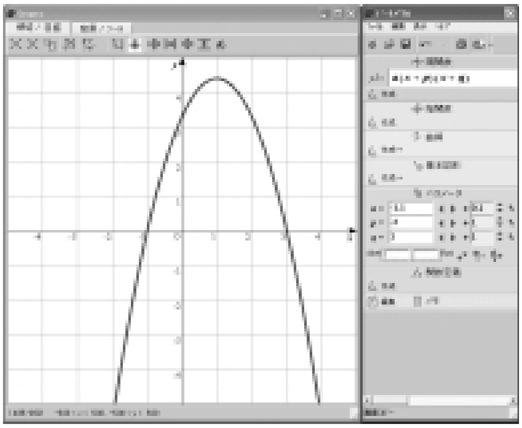
pだけを変化させることでqの位置が変わらないことがわかります。

またここで，x軸の通過点と，開き具合のパラメータaとの関係を生徒たちに見せてみましょう。



（図46）

図46は，aを0.3としたところです。



（図47）

図47は，aを-1.1としたところです。

図46，図47とも，aの値を変化させていますが，x軸との交点に変化は見られません。さらに，いろいろと，pやqを値を動かしてみて，pやqを値の「符号を逆にした値」でx軸と交わっているのが「見えて」きます。

●２次関数のグラフとx軸の位置関係

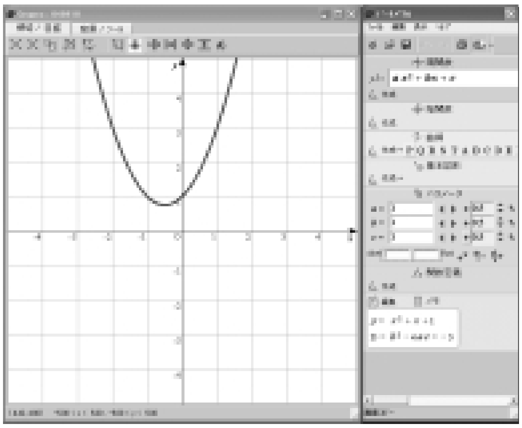
（教科書 p.65）

いわゆる $D=b^2-4ac$ の値とx軸との共有点の関係のところです。

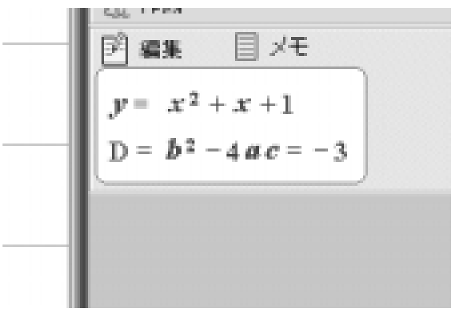
ここは，基本的に $y=ax^2+bx+c$ のグラフを示し，そして，「メモ」のところにて，Dの数値を計算して示すと効果的です。

図48は，$y1=ax^2+bx+c$ そしてメモを入れたところです。a，b，c 全てが１なので，Dが -3 と表示されているのがわかります（図49）。

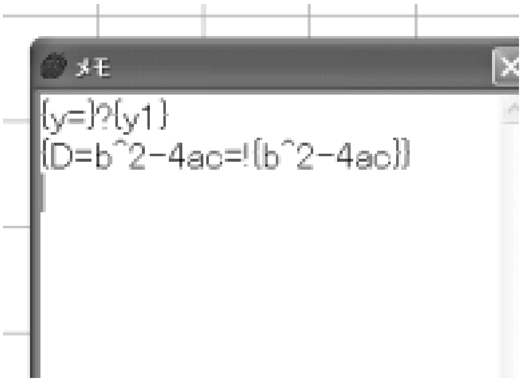
図50は，「メモ」の中味の記述です。たったこれだけで，$y1$の式の表示と，b^2-4ac の値を計算して表示してくださいます。



（図48）



（図49）図48の右下拡大図



（図50）

これで，a，b，cの数値を様々に動かしてみると

・$D>0$のとき，x軸と２点で交わる。

・$D=0$のとき，x軸と接する。

・$D<0$のとき，x軸とは共有点をもたない。

が，はっきりと見えてきます。

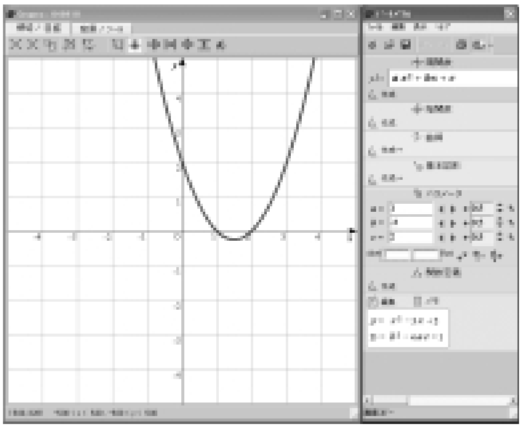
ここはまず，具体的な例を出してみましょう。

「２次関数 $y=x^2-3x+2$ のグラフは，

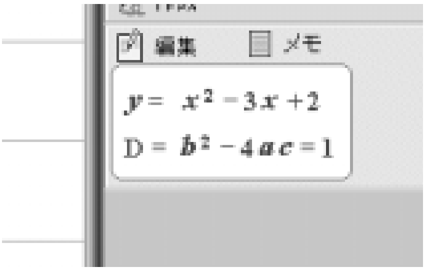
$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$ であるから，

x軸と２点を共有する。」

（『高等学校数学Ⅰ』p.74 例11）



（図51）上記の問題をGRAPESへ入力



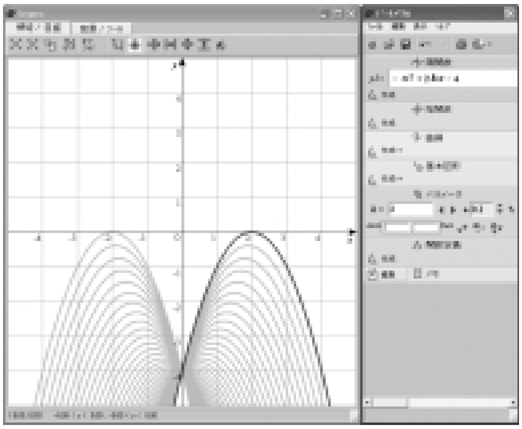
（図52）図51の右下の拡大図

また，次のような例題があります。

「２次関数 $y=-x^2+2kx-4$ のグラフが x 軸に接するように，定数 k の値を定めよ。」

（教科書 p.65 例題10（2））

もちろん，教科書では，D を計算して「x 軸に接する」という言葉から「イコールゼロ」として，k を出しています。この「意味」というか，ここでイメージをもてない生徒が意外に多いことに何年か前に気づいたことがあります。GRAPES で示すと「そういうことなんだ。」とか，「そうだよね。」と言う言葉が返ってきます。「イメージをもたせる」ということが非常に大切な意味をもつことを実感しました。



（図53）

図 53 は，$y=-x^2+2kx-4$ とおいて，k の値を「1（初期値）」から，「x 軸と接する」まで変化させたものです。すると k は -2 と２の２つあることが一目瞭然となります。また，このグラフの頂点を見続けるとその動きは放物線となり，なぜ，この動きが放物線となるのかを問いかけるのもおもしろいでしょう。力のある生徒はレポートにしてもってきたりします。

●２次関数のグラフと２次不等式の解

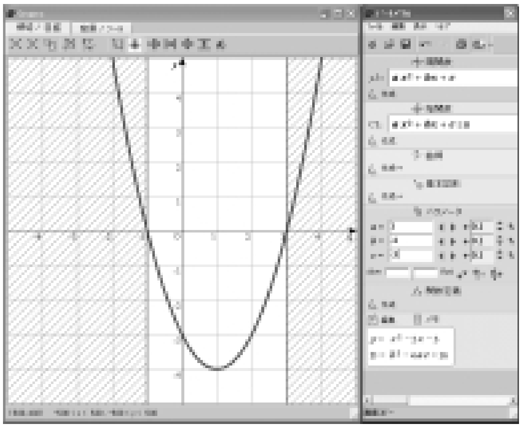
（教科書 p.67）

ここのところも，これまで説明してきたことを使って解説できます。

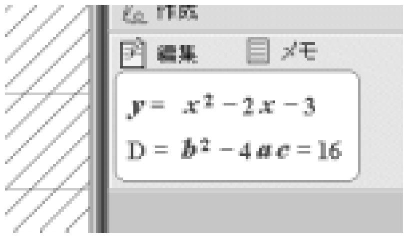
「陽関数」に $y1=ax^2+bx+c$ そして「陰関数」に $ax^2+bx+c\geqq 0$ を入れてみます。

さらに，図 50 で示した「メモ」を入れて「D の数値」を示してみます（図 54，55）。

結局，ここのところは，D が正，0，負のそれぞれの場合の ax^2+bx+c が正，0，負となるかどうかのそれぞれの場合を考えることになります。このまとめをしたのが，教科書 p.71 に出ています。



（図54）$a=1$，$b=-2$，$c=-3$ としたところ



（図55）図54の右下の拡大図

● ２次不等式の応用

またちょっとハイレベルな例題として次のようなものがあります。

「２次関数 $y=x^2-2kx+2k+3$ のグラフが，つねに x 軸より上方にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。」

（『高等学校数学Ⅰ』p.81 例題 11）

この手の問題，皆さんは授業でどうされていらっしゃいますか。多くの方が，D の式を作って，「つねに x 軸より上方にある」という問題文から，$D<0$ の式を作り生徒たちに解かせていると思います。しかし，生徒たちの多くが，この問題文の意味をとらえられないでいるのも事実です。

そこで GRAPES の活用ということになります。k の値の変化によって，１つ１つ２次関数が決定していく様子，さらには，そのときの「D の値」も示すことができます。

図 56 は，問題を GRAPES に入力したところです。k は，初期値の１。これまで述べてきた「$y1$の式」と「D の表示」もお忘れなく付け足してください。

さて, ここでのDは，これまでのように単純に b^2-4ac と入れれば良いというものではありません。もちろん「計算式」という意味での b^2-4ac は，よろしいのですが，そのあとの「実際にこの値を計算せよ」の式の部分では, 当然ながら…

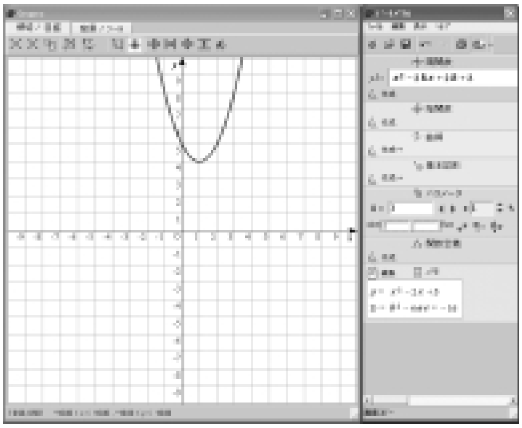
$$(-2k)^2-4\cdot 1(2k+3)$$

と入れることになります。

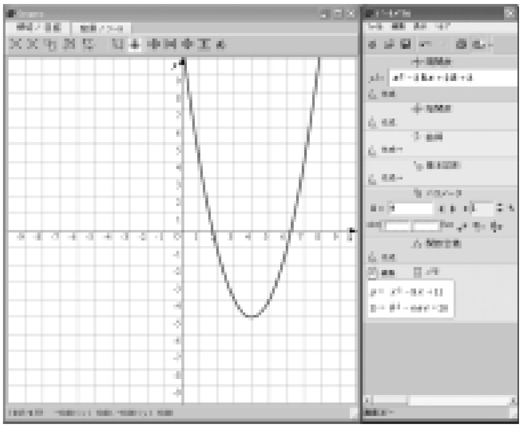
実際にこの式を入れるところを生徒たちにも見せるといいでしょう。

そして，教科書の例題の「解」のところに出ている「$-1<k<3$」の動きを見せてみましょう。今回はkを４として，そこから１ ずつ数値を減らしてみます。これは紙面の都合上ですので，皆さんは 0.1 刻みでやってみてください。

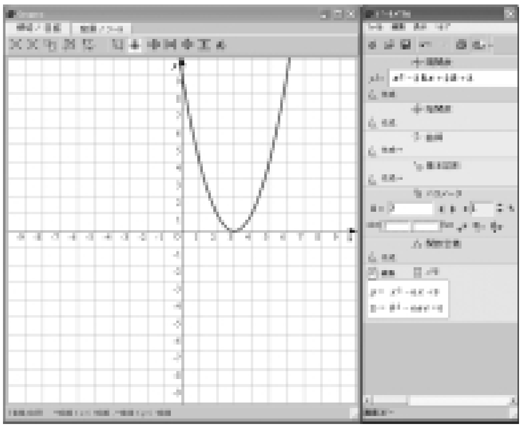
「なめらか」に動いてくれます。



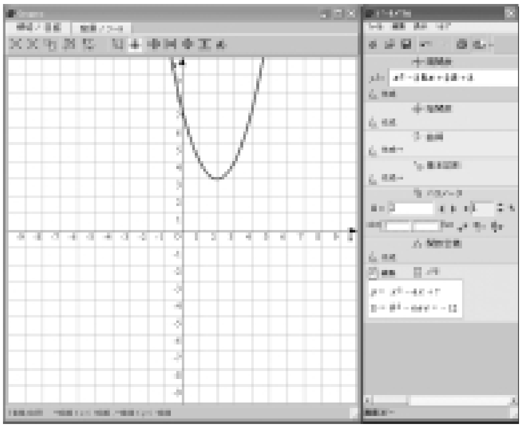
（図56）



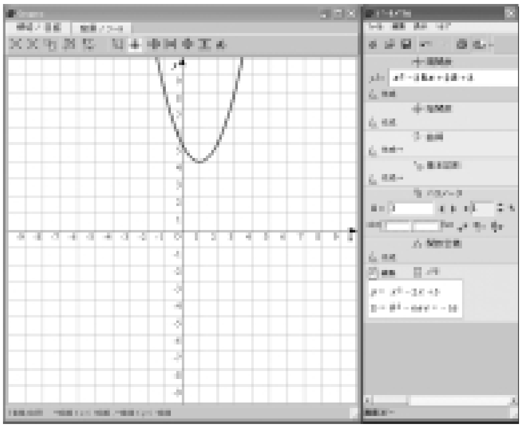
（図57）$k=4$ のとき　$y=x^2-8x+11$，$D=20$



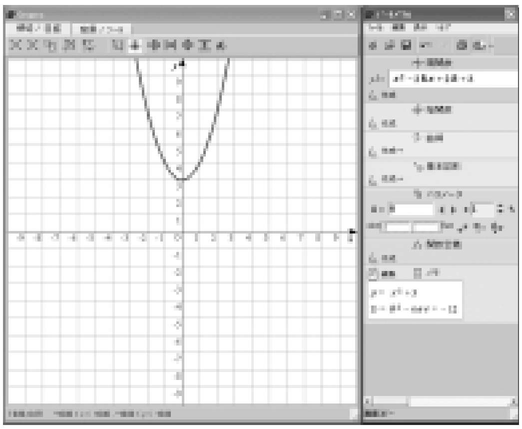
（図58）$k=3$ のとき　$y=x^2-6x+9$，$D=0$



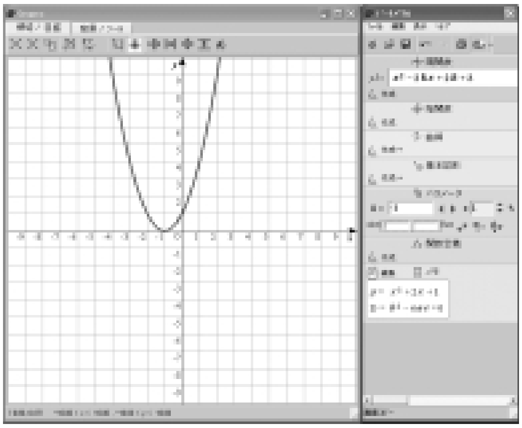
（図59） $k=2$ **のとき**　$y=x^2-4x+7$，$D=-12$



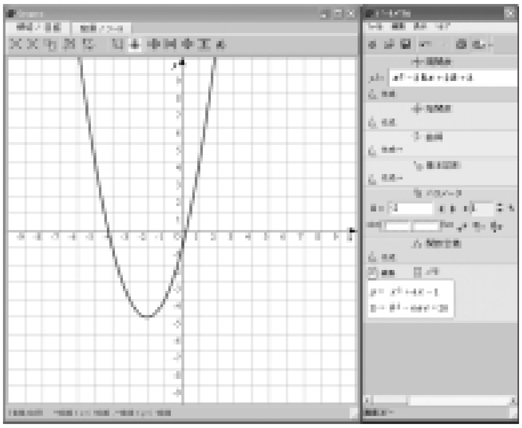
（図60） $k=1$ **のとき**　$y=x^2-2x+5$，$D=-16$



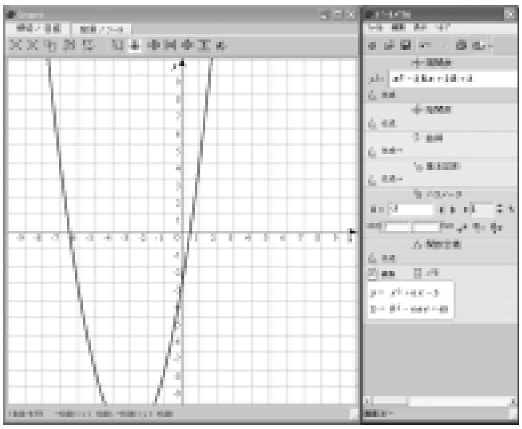
（図61） $k=0$ **のとき**　$y=x^2+3$，$D=-12$



（図62） $k=-1$ **のとき**　$y=x^2+2x+1$，$D=0$



（図63） $k=-2$ **のとき**　$y=x^2+4x-1$，$D=20$



（図64） $k=-3$ **のとき**　$y=x^2+6x-3$，$D=48$

前ページの図57～図64で動きがわかったでしょうか。

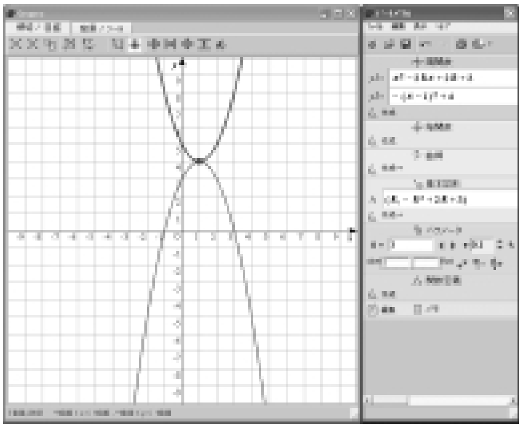
それぞれのkの値に，１つずつ，２次関数が定まり，そして，その１つ１つにDの値が決まっていくことで，グラフとの位置関係が見えてきます。

そして，いわゆる「黒板とチョーク」からでは表現できなかったことに，生徒たちを気づかせることができます。

そう，図57～図64の全ての図で，このグラフ$y=x^2-2kx+2k+3$が，点(1，4)を通過しているのがわかります。これなども，このグラフの式を，$k(-2x+2)+(x^2-y+3)=0$と変形することで見えてくるわけですが，これは，「数学Ⅱ」への予告編みたいなものとして使えますね。

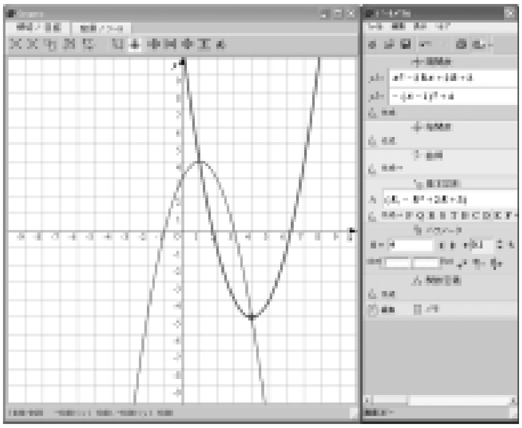
また，このkを変化させたときの，このグラフそのものの「動き」に着目させます。とくに「頂点」に着目させるとよいでしょう。「どうやら，２次関数のように動いている『らしい』」と，生徒たちは気づくでしょうか。そして，「本当に２次関数なのか。２次関数ならば，なぜ，２次関数として動くのか。」という発展レポートを出すのもおもしろいと思います。

この，元の式$y=x^2-2kx+2k+3$を，平方完成して，$y=(x-k)^2-k^2+2k+3$。よって，頂点の座標は，$(k, -k^2+2k+3)$。よって，頂点は$y=-x^2+2x+3$の軌跡をたどる。これを平方完成すれば，$y=-(x-1)^2+4$。だから，頂点の軌跡は，(1，4)を頂点として，上に凸の２次関数になるんだ。と，ここまで，生徒が自力でできたとしたらすばらしいですね。教師側で，示してあげても，興味をもつ生徒は少なからずいると思います。



（図65）

図65は，$y1=x^2-2kx+2k+3$のみならず，$y2=-(x-1)^2+4$も表示させたところです。頂点A$(k, -k^2+2k+3)$も太く表示させていて，はっきりわかるように工夫しています。



（図66）

図66は，kを変化させて頂点が，$y=-(x-1)^2+4$に沿って動いている様子を示しています。いろいろ動かしても必ず(1，4)を通過する様子も見ることができます。