

GRAPESを「幾何」で使うための初歩の初歩
～「数学A」の平面図形での活用に向けて～

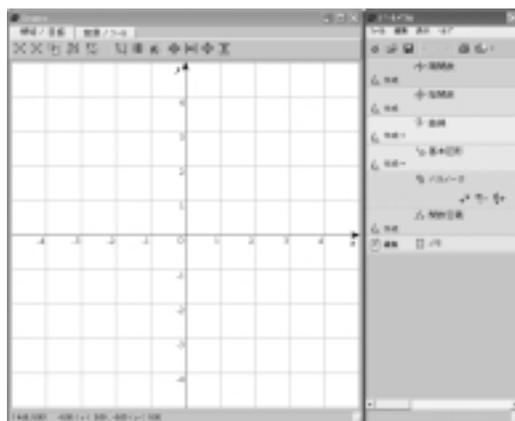
1 はじめに

前ページまで、ひたすら、関数を表示し、生徒たちに動的シミュレーションを味わってもらってきました。しかしさらに、友田先生のたいへんな御努力により、以前よりも幾何の分野においても使用することが可能となっておりますことを御存知でしょうか。幾何のソフトといえばフリーソフトのGeometric Constructor(愛知教育大学 飯島康之先生作)や、フリーソフトではないものとして、Cabri Geometry plusや、ジオメタースケッチパッドなどが有名です。しかし今回は、あくまで、使い慣れたGRAPESを使用して「数学A」での実践につなげるための「幾何の分野で使うための初歩の初歩」を書いてみたいと思います。「初歩の初歩」というタイトルをつけたように、初めて幾何で使ってみようと思う方を対象に書いています。この文章をお読みいただくだけで、あたかも操作しているように感じていただければ幸いです。なお、本原稿も文英堂の数学教科書『高等学校新編数学A』(教科書番号014)を参考に書いています。文中に「教科書p.」と出てきた場合は、そのページの内容を扱っております。

2 具体的な操作について

(1) 座標軸の消し方

まず初めに初期画面から座標軸を消しましょう。これが幾何で使うための第一歩となります。使用するGRAPESのバージョンは6.37としています。関数を扱うのと違うところ、それは、座標軸の有無ですね。あくまで点の移動そのものとしては、もちろん座標が大きな役割をはたすのですが、「見せる」場合には、座標は不要となります。そこで座標軸を消してみましょう。



(図1) お馴染みのGRAPESの初期画面

図1は、お馴染みのGRAPESの初期画面です。この画面の上部の座標マークのところにマウスを持っていくと、図2のように「目盛/軸表示」と表示されるところがあります。



(図2) 「目盛/軸表示」と表示されたところ

ここをクリックしてみてください。座標が様々に変化して、4回目には、キレイになくなってしまいます。さらにクリックすると、また現れますので御安心を。

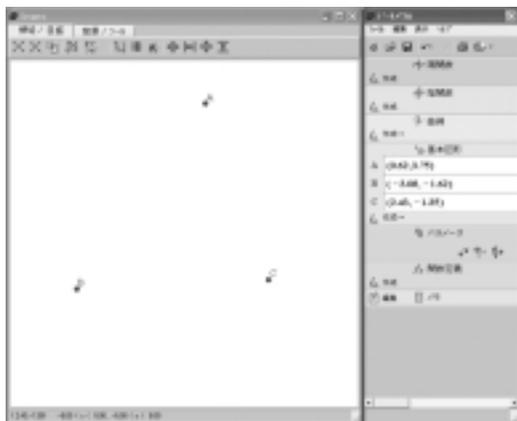
(2) 点の打ち方

次に、点を打たないことには、始まりません。画面上で右クリックして、点を打ってみましょう。とにかく、点A、点B、点Cの3点を順に打ってみましょう。もちろん、ドラッグアンドドロップでどこへでも、好きなところに移動することができますから、御安心を。



(図3)

ここで図3のように右クリックしてマウスを「点を打つ」にもっていっていきましょう。打ちたい点の名前が表示されます。



(図4)

そして適当に点A, 点B, 点Cを打っていきましょう。

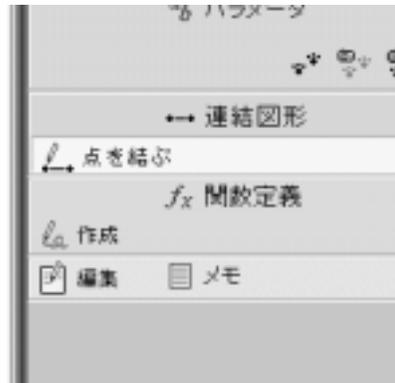
(3) 点の結び方(長さの表示)

次に, 点と点を結んで三角形を作ってみましょう。さきほどの右クリックをして, 図5のように「点を結ぶ」にマウスをもっていっててください。



(図5)

そしてマウスをクリックしますと, 図6のように画面の右側に「連結図形」, 「点を結ぶ」が出てきます。



(図6)

そして, 例えば点Aのところマウスをもっていくと, いかにもこれから線をひくように, マウスの形が鉛筆の形に変わります。



(図7) マウスが鉛筆の形に変化

そして、ここからマウスをクリックしたままドラッグして、線をひいてみます(図8)



(図8)ドラッグしての線引き

点Bに到着し、マウスのクリックをやめると、「連結図形のプロパティ」が出現します(図9)



(図9)線をひいた直後に現れた「連結図形のプロパティ」



(図10)「連結図形のプロパティ」の拡大図
この「連結図形のプロパティ」は、今後、様々なことを表示させることができる重要なプロパティです。

この「連結図形のプロパティ」を見てもわかるように、2点を結ぶ線を「線分」とするか、「半直線」とするか、「直線」とするかなどを決めることができます。

そして、マウスを「ラベル」というところにもっていき、「」マークをクリックする(図11)と、



(図11)線分の長さの表示も可能

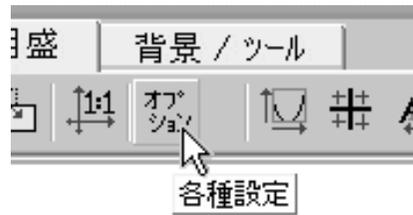
「 $\{len(A, B)\}$ //長さ」という不思議な文字が出てきます。ここは本来、線分「AB」というような、名前をつけることが可能な「ラベル」という機能です。しかし、ここにさきほどの不思議な文字(命令)をそのままクリックすると、線分の長さが表示されるという仕組みなのです。これは、すでに友田先生が「この長さを表示するための命令」を我々が書かなくてもすむように、事前に書いてくださっているものです。ラベルをさきほどの「命令」にして、「OK」を押してみると、この線分の長さが表示されます(図12)。



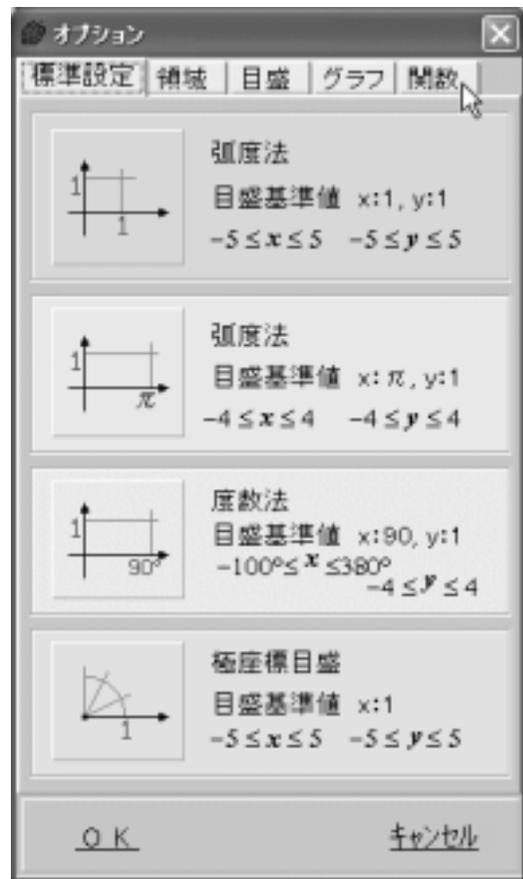
(図12) 表示された「線分の長さ」

(4) 3点を結んだ角度の表示

さて次に、角度の表示です。ここで角度の表示というと、高等学校で扱う場合には、「度数法」と「弧度法」が問題になると思います。GRAPESでは、どちらでも表示できるように設計されています。画面上部の「オプション」(図13)をクリックし、その中の「関数」のタブをクリックしてみます(図14)。



(図13) 画面上部の「オプション」



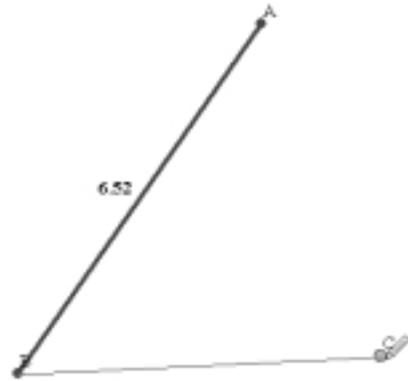
(図14) オプションの中の「関数」タブをクリック



(図15)「関数」タブの中身。

ここでは、角の単位は「度数法」に、また、角の範囲は、「 -180° から $+180^\circ$ まで」を意味する「 $-\pi \rightarrow \pi$ 」にそれぞれ変更してみます。そしてOKとします(図15)。

画面上では、何も変化がないようですが、ここから実際に角度を表示させてみると、その変化がはっきり分かります。まず初めに、さきほどの続きとして、図16のように点Bから点Cに線分を結んでABCを作ります。そして、これから、ABCの角度を表示させるために図17のように再度、点Aから点Bに向かって線を結んでみます。



(図16) 点Bから点Cに結んでいるところ



(図17) 再度点Aから点Bに向かって結んでいるところ

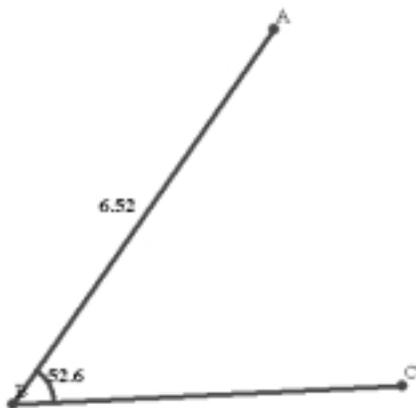
このあと、点Bに到着してマウスのドラッグを離すと、また「連結図形のプロパティ」が表示されます。ここで、次のようにしてみてください。

1. 頂点のところには、ABとしか記入されていないので、自分でCを追加記入する。
2. 図形は「角」を選んでクリック
3. ラベルには、友田先生が、すでに角度を表示できるよう準備してくださっているので、それを選択。

これで「OK」としてみてください(図18)。角度が度数法で表示されます。



(図18) 角度を表示させるための設定



(図19)

すると、この場合の角度 52.6° が表示されました(図19)。

ではこの後、1つの点(例えば点A)をつまんで動かしてみましょう。当然ながら、ABの長さも変わるでしょうし、ABCの角度も変わります。

ここで、いきなり点Aをつまもうとしても、まだ、このままでは「点を結ぶ」が生きてしまっています(図20)。画面右側の「点を結ぶ」をクリックして、解除します(図21)。

この状態でマウスを点Aにもって行ってください。点Aをつまんで動かせるようにマウスポインタが手の形に変化します(図22)。

そして点Aを動かしてみましょう。

ABの長さやABCの値が変化しているのを実感することができます(図23)。



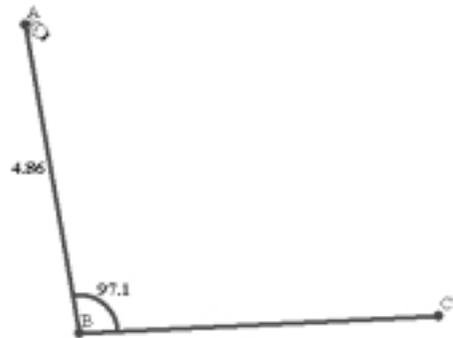
(図20) 有効になっている「点を結ぶ」



(図21) 無効になった「点を結ぶ」



(図22) つまめるモード

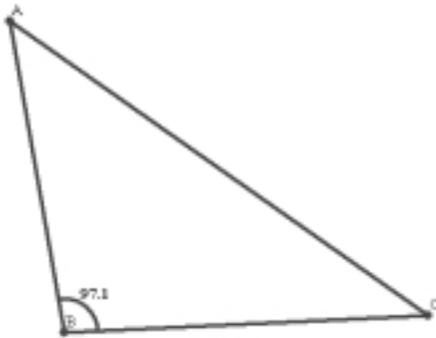


(図23) 点Aをつまんで移動

(5) 中点連結定理

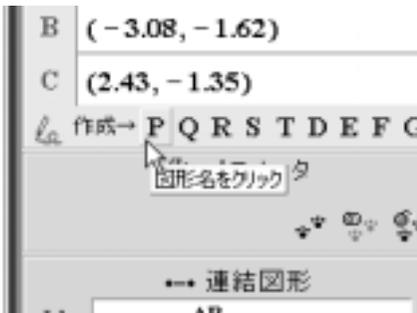
さて、ここまでのことを使って「中点連結定理」を実際に試してみましょう。この定理を学ぶのは中学ですが、教科書 p.14 でも取り上げています。

まずは、図 24 のように点 A と点 C を結び AB の長さの表示をはずしました。



(図 24)

そして、次に点 A と点 B の中点を打ってみましょう。この点は P としてみましよう (図 25, 26)。



(図 25) 点 P をクリック



(図 26) 今回は単純に「点」



(図 27)

ここで、図 27 のように「ベクトル表記」をクリックし、 x, y の表記を「一本化」します。



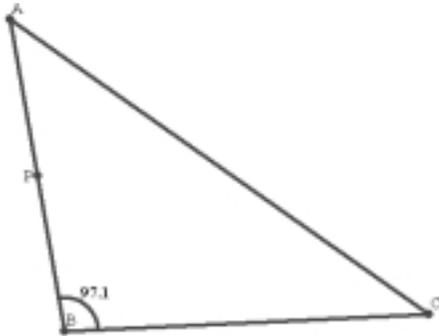
(図 28)

そして、関数電卓の「関数 3」のタブに入っ

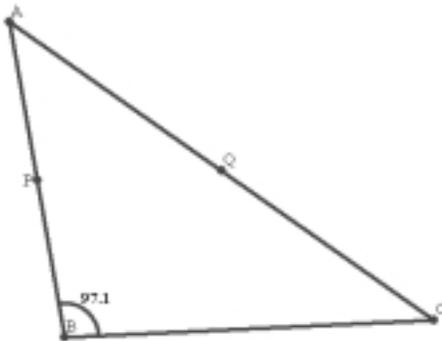
ている「分点」を使って点Pの入力をします。



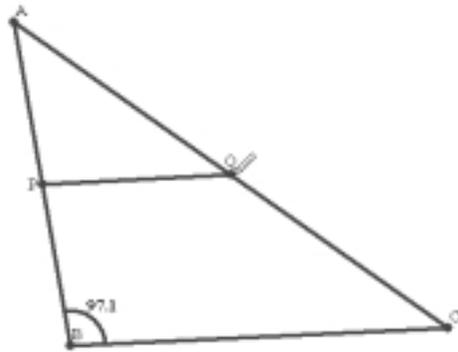
(図29) ラベル位置を一工夫



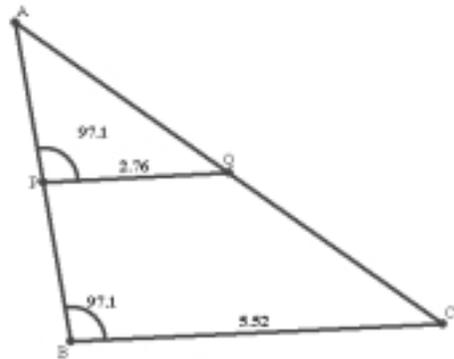
(図30) これで点Aと点Bの中点Pが打てる



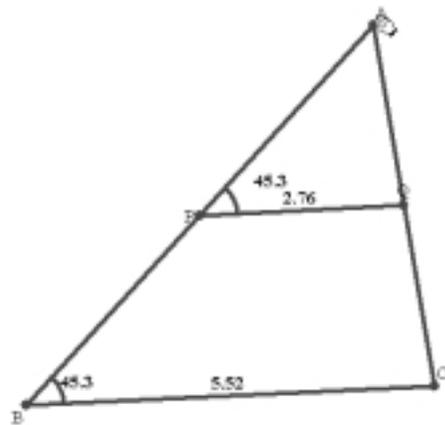
(図31) 同様に中点Qを打ったところ



(図32) 点Pと点Qを「点を結ぶ」モードで結んでいるところ



(図33) 長さ、そして APQも表示



(図34) 「つまめるモード」でいろいろ動かしてみましょう

(6) 円の表示

さて、直線や角度が表示できるようになりましたら、次は何と言っても、円ということになります。しかし、円を表示するだけでしたら、「基本図形」を使って、それほど、難しくなくできてしまいます。この基本図形に使用できる文字はP, Q, R, S, T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, Nと19種類も用意され、「曲線」の共通使用となっています。



(図35) 基本図形のPを選択

そして基本図形を選んだ場合、「点」、「円」、「水平線」、「垂直線」の4つが選択できるようになっています。今回は、その中の「円」を選択してみます(図36)。



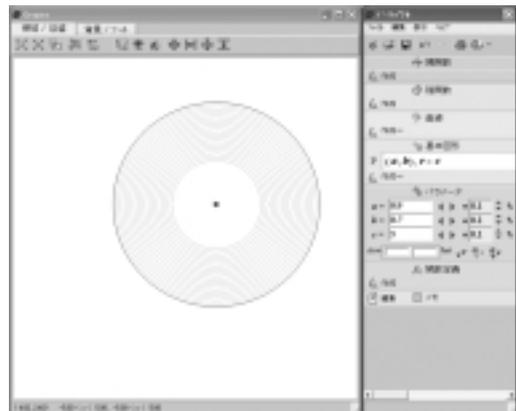
(図36) その中の「円」を選択

すると、ここで突然、画面が下に伸びて、図37のように、各パラメータを決められるようになります。この突然現れる方式も、「生徒にとってやさしい」友田先生のすばらしいアイデアだと感心しております。



(図37) 中心と半径を決めるだけ

ここで、半径は、必ずしも「数値」にすることはありません。そこがなんととってもGRAPESの最大の魅力です。そう、「パラメータ」が使えるのです。 $x=a, y=b, r=c$ と決めてあげれば、これで、 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ が表示されることになります。図38は、半径を「残像あり」にして増やしたものです。



(図38)

(7) 円周上の点の表示

(円に内接する四角形 教科書 p.20)

さて、円を描くことは、容易にできましたが、やはり授業で使うことを考えますと、様々なアイデアが必要となります。円を描き、円周上の点を動かし、そして、角度を表示していく。角度は、「弧度法」でもよいものの、やはりわかりやすいのは、「度数法」だろうということになります。そこで、いろいろと思考錯誤してみました。私がここで発表するよりも、もっとよい表示の仕方があるのかもしれませんが、また、GRAPESは、友田先生の不断の御努力によって、日々進化しているソフトですので、もっと簡単に表せる方法が出てくるかもしれません。とりあえず、ひとつの「石谷のやり方」ということで、お読みいただければ幸いです。

まず、座標を消し、「度数法」、そして、「-

」にしておきます。(p.23の図15参照)次に、円周上の点を4つ指定してみましよう(図39)。いずれ、円周上の点は「動かすこと」が前提となっています。ここで「基本図形」を使っても良いのですが、すでにパラメータを使用することを前提としている「曲線」の中の「媒介変数グラフ」を使用するのがポイントです(図40)。



(図39) まず「曲線」のAを指定



(図40)「媒介変数グラフ」を選択

そして、以下の様にパラメータを指定を行ってみてください(図41)。



(図41)「媒介変数グラフ」の各パラメータの指定

まず a ですが、これで「半径」として使います。そして x, y の p, q は平行移動分です。これらを指定することで、任意の位置に円をもっていけることを考えています。次に「変域」の右側

は、当初2 となっていたところですが、度数法なので360としています。さらにこのところの「増減幅」ですが、当初0.1となっていたのですが、これを5としました。一周360°ですので、「1°ずつ」の変化では、進み方がかなり遅く感じました。ので「5°ずつ」の変化としましたが、みなさんお使いのコンピュータでは、それぞれ微妙に違うかもしれません。各自、お試しください。パラメータは、ここでは*t*を使用しました(図42)



(図42) 使用できる多くのパラメータ

また、「点」のところでは、「ドラッグ」にチェックを入れ、「手でつめる感覚」を大切にしています。そして最後に「ラベル」ですが、通常ですとAのみとするところですが、ここをA(*t*)としてみました。すなわち、「この点Aは、パラメータ*t*で動いていますよ。」と表示しているのです。これにより、どのパラメータを動かしたら、どの点が動くのかが、はっきりします。ラベルの「表示位置」は、一応「左上」としました。表示が円周と重なってしまうことがあるかもしれませんが、まあ、これは適宜変更してもらいましょう。

以上で点Aの指定が終わりましたら、点B(図43)、点C(図44)、点D(図45)と4つほど、指定しましょう。パラメータは、皆さんのお好きなものを適宜、選んでください。



(図43) 図形Bの指定



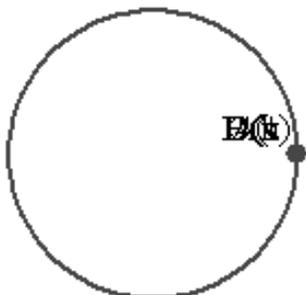
(図44) 図形Cの指定



(図45) 図形Dの指定

(8) 応用例としての円に内接する四角形

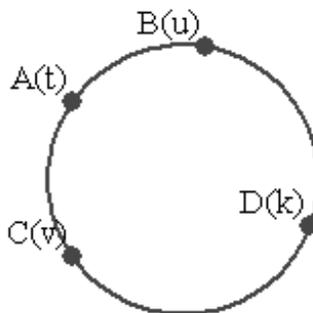
さて、ここまですを設定しますと、点A、点B、点C、点Dがすべて同一点となってしまう、重なってしまっています(図46)。



(図46) 4つの点の重なり

「これでは、ドラッグもできない!!」と、思いきや、なんと点Aから順に、ドラッグができました。不思議な感じがしました。

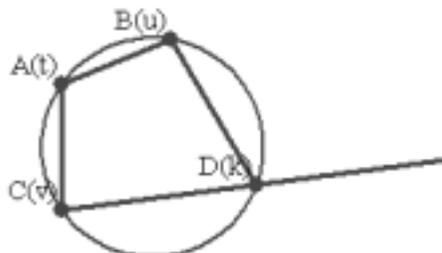
さて、では、「円に内接する四角形の向かい合う内角の和は180°である。」(教科書p.20)をやってみましょう。四角形ができる位置関係になるように点を移動させてください。図47の様になりましたでしょうか。



(図47) 円に内接する四角形にする位置

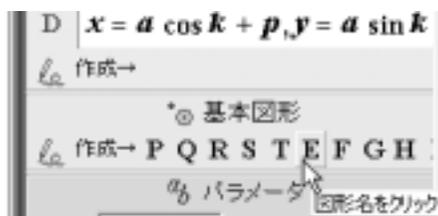
そして、それぞれの点を結んでみてください。(p.21の図8, 9参照)

ここで、CDは、線分とするのではなく、「半直線」の形にしてみてください。ちょうど、図48のような感じになったでしょうか。



(図48) それぞれを結んだところ

さてここで、CDの延長上に1つ点が欲しいところです。そこで、今回は、単純に「基本図形」の点Eで設定しようと思います(図49)。



(図49) 基本図形の点Eを使用

CDの延長上の点ということで、あまり「凝った」形は使いませんでした。「分点」を使ったのです。



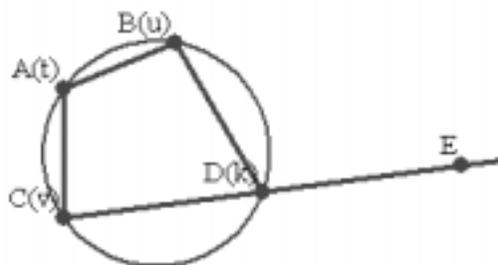
(図50)

マウスをもっていくと下のほうに「分点」の説明が表示される。とても丁寧です(図50)。



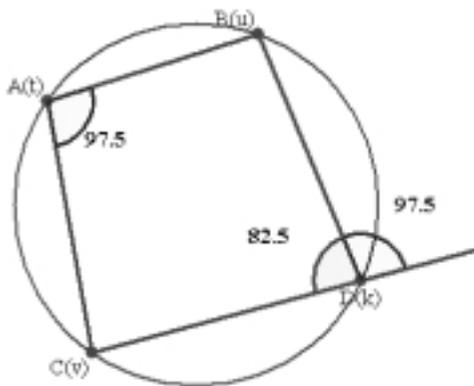
(図51) 点Eを「分点」を用いて表現

式の形を見れば、一目瞭然ですね。そう、CDを2:1に「外分する点」としてあります(図51)。



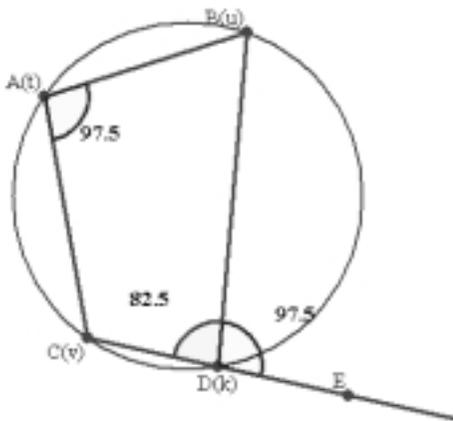
(図52) 点Eが表示された

そして次に、 BAC 、 BDC 、 BDE の数値を表示させてみましょう(図53)。(やり方は、p.23の図17、p.24の図18、19を参照)



(図53) 角度を見やすくするのモッコ

そして、点A、点B、点C、点D、および、各パラメータを変化させてみてください(図54)。



(図54) 点Dを動かしてみた

3 おわりに

友田先生作のソフト GRAPES のすばらしさは、ここに挙げただけに留まりません。図形分野においても、p.25の図28を見てもわかるように、多くのパラメータやコマンドが用意されています。

「数学 A」では、「三角形の性質」として、「三角形の辺と角の大小」、「角の二等分線と辺の比」、「三角形の重心・外心・内心」を扱いますし、また「円の性質」として「円に内接する四角形」、「円と直線」、「2円の位置関係」も扱います。生徒たちにとって、実際に触って動かしてみるという機会を得ることはとても有意義なことだと考えられます。

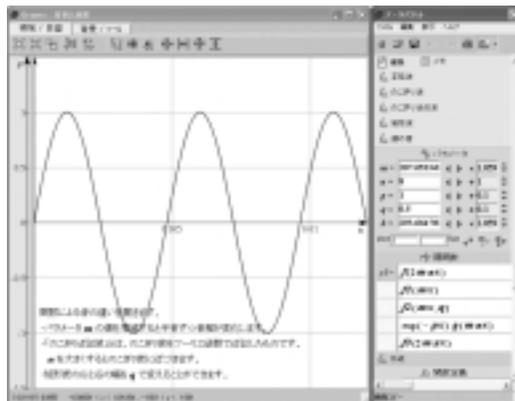
ぜひ、この紙面で私が操作した以外のコマンドにも多く触れていただき、GRAPES のすばらしさを体感していただければと思います。

今後ともよろしく願います。

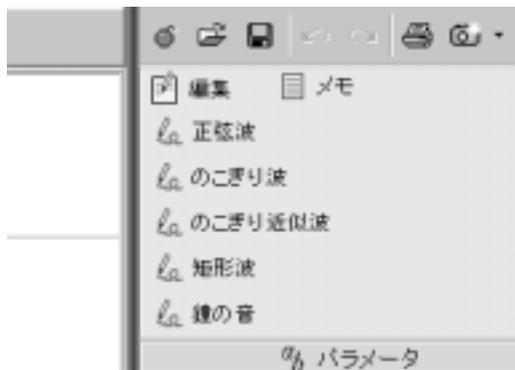
音が出せるようになった GRAPES

本原稿執筆中に、友田先生の御努力により、GRAPES が、Ver.6.40 へとアップされました。今回のアップにより、GRAPES は、PLAY コマンドが使えるようになったので、音が出せるようになりました。この応用分野は、非常に広く考えられます。とくに、理科の分野においても GRAPES をおおいに活用していくことが可能となるのではと期待されます。

ここで実際に紙面から音は出ませんが、友田先生が作られたサンプルの中から紹介したいと思います。



サイン波(正弦波)のきれいな音



様々な「波」の音を楽しむ

ぜひとも、皆さんも同僚の理科の先生方にもご紹介いただければと思います(もちろんこれ以外のサンプルも多く入っています)。