GRAPESの私なりの「ツボ」
～数学Ⅱの各分野に焦点をあてて～

石谷　優行

神奈川県立神奈川総合高等学校教諭
専攻　数学教育
個人サイト：http://ishitani.com
http://grapes.jp（GRAPES専用）
メールアドレス：masayuki@ishitani.com

1 *はじめに(お礼とお詫び)*

昨年（2005年）の春に出させていただきました「シグマジャーナルNo.29」（以下，No.29と略記）では，多くの方からメールをいただきました。ありがとうございました。心より感謝申し上げます。また，昨夏の長野での日本数学教育学会全国大会では，私の発表会場に入れない方がいらっしゃったり，多めに150部用意した資料も発表時間直後，あっという間に無くなってしまったりしたようです。会場や資料の点で，ご迷惑をおかけした皆様には，この場を借りてお詫び申し上げます。

さて，本号は，そのNo.29の続きのような感覚で書かせていただきます。そのため，随所でコンピュータ上の操作の画面を省略した形といたしました。前号で出ているものはそちらを参照していただいて本号では極力文章のみとし，できあがった画面を中心に話を進めていきたいと考えます。

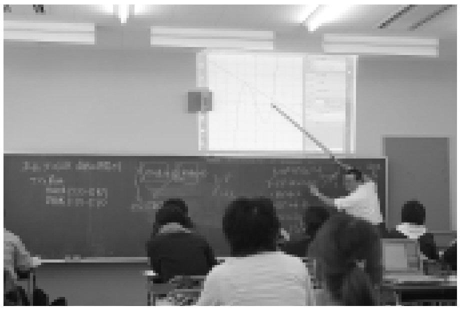
なお，本原稿は，文英堂の『新編数学Ⅱ』（教科書番号 014）を参考に書いています。文中に「教科書p.〇〇」と出てきた場合は，そこを引用しております（一部，『高等学校数学Ⅱ』（教科書番号 013）や文英堂の参考書などの引用もあります）。

2 *コンピュータ活用の全般的なこと*

日本数学教育学会全国大会を始め，多くの場所で発表をしていますと，必ず出る質問が「先生は，授業のすべてをコンピュータを用いて行っているのですか？」とか「グラフを手で描かせるということはされていますか？」というものです。あたかも，私が，数学の授業すべてにおいてコンピュータを活用しているように思われるかもしれません。しかし，それは大きな誤解ですし，またもしそのような形で授業を行ったとしたら生徒たちは飽きてしまうと考えます。本原稿の中でも述べますが，コンピュータ活用には，「ここぞ」というタイミングがあります。そしてまた，意図的にGRAPESを表示させないで，生徒たちの頭の中でイメージを膨らませるということも，非常に大切なことです。本校は90分授業です。問題解説，そして演習という数学の授業の基本的な流れを黒板とチョークだけで行う日も少なくありません。しかし，ここは，GRAPESがあったほうがよいだろうと考えた授業には積極的に，ノートパソコン，プロジェクタ，延長コードを持って授業に臨みます。また，生徒たちをコンピュータ学習室に連れて行っての個別操作の授業ですが，これはほとんど行っていません。ただし，三角関数のグラフにおいて各パラメータがどんな働きを持っているかを調べる授業だけは，個別操作を通しての発見学習を行っています（後述します）。

さて，これも質問の多いコンピュータ活用の「頻度」についてですが，どこをどの程度，どうやるかということは，それぞれの先生方の授業展開に関わることです。担当している生徒たちの理解度によっても変わってくるでしょうから，それこそ適正な回数というものはないと考えます。

また，『高等学校学習指導要領解説（数学編）』にも示されている「手によるグラフ描き」は，もちろん行っております。手順としては，必ず手で描かせてからGRAPESの表示をするよう心がけています。定期試験にGRAPESは持ち込めないわけ



（図１）本校は黒板が上下できるので，GRAPESの画面を黒板の上に映している。またプロジェクタの光が強いので直接黒板に映すことも可能。「http://www.ishitani.com/3-grapes/」参照

ですから最終的に手でグラフが描けなければなりません。生徒たちがイメージを膨らませるための知的教具として，GRAPESは，すばらしい働きをしてくれるソフトであると考えています。

3 具体的な実践

(1) 図形と方程式

●2点の距離（教科書 p.43）

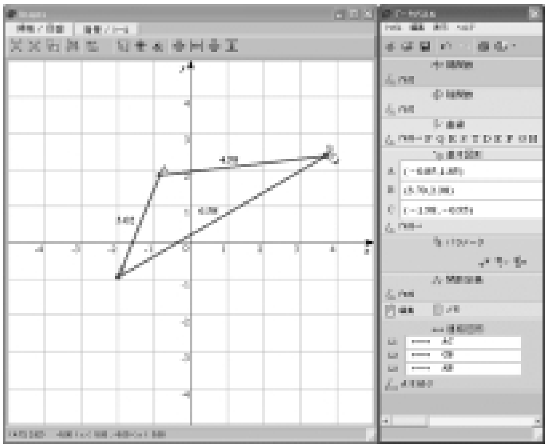
何の変哲もありませんが，GRAPESで直線の長さの表示ができることを利用してみましょう。

「GRAPESを立ち上げ」→「座標エリアで右クリック」→「点を打つ」で「A」でクリック。

注意　No.29 のp.6 に点を打つ画面の様子が出ています。No.29は，http://www.bun-eido.co.jp/textbook/sjournal/sj29/sj29.htmlよりPDFファイルにて全ページダウンロードできます。以下，カッコ書きで，【No.29 p.○○】と示していきます。

同じように点B，点Cを座標に打ち，そして，点と点を結びます。

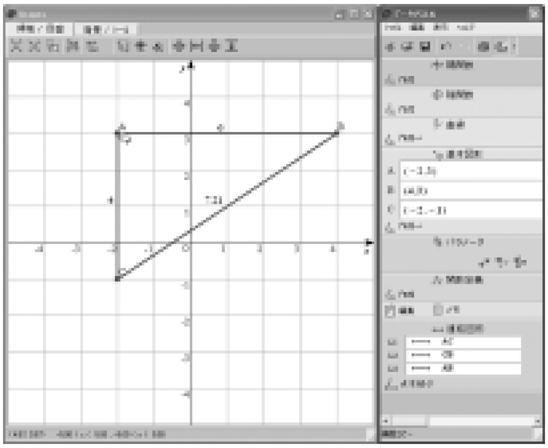
「座標エリアで右クリック」→「点を結ぶ」でクリック。すると，ドラッグして線を結ぶことができます。また，図形連結のプロパティのラベルのところに線分の長さを一発で表示する形を本ソフトGRAPES作者の友田先生が用意してくださってますので，それを選択します【No.29 p.21～22】。



（図２）

３つの点を表示しましたら，点をつまんで動かすわけですが，いきなりはつまめません。マウスカーソルが鉛筆マークになってしまいます。必ず，「座標エリアで右クリック」→「点を結ぶ」をもう一度クリックして，「点を結ぶ」を解除しておいてください。すると，これで点をつまむことができます（図２）。

そして，ここが「ツボ」ですが，パソコンの「CTRL」キーを押しながら，点をつまんでみてください。いわゆる「格子点」にのみ点が移動するようになります。



（図３）

さて，図３は，格子点の移動を利用して点Aの移動により，直角三角形を作ったところです。３つの点をいろいろと動かしてみるとわかりますが，２点間の距離が直角三角形を通して，３平方の定理で説明できることが実感できます。

いろいろと動かしている図は紙数の関係から省略いたしますが，示してしまえば，何のことはないわけです。しかし，実際に点を動かすことにより長さが変化し，また，その長さが生徒たちの予想どおりにいろいろと変化する面白さは格別です。

また，ちょっと応用ですが，位置関係により角A，B，Cのそれぞれを60°や30°などにした場合，数学Ⅰの正弦定理や余弦定理の説明にも使えると考えています。

角A，B，Cのそれぞれの角度を○○°と表示する方法は…。【No.29　p.23～24】でございます。

●線分の分点（教科書 p.45～47）

さて，ここのところは，内分点，外分点のところです。皆様，ここのところは，どのように授業されていらっしゃいますか。いわゆる黒板とチョークの授業の場合，内分点と外分点を別々のものとして教えているかと思います。それは，公式を確認させ，覚えさせるときのことを考えればしかたのないことです。教科書でも，まとめとして，内分点，外分点の式を別々に表示しています（教科書 p.47）。

しかし，GRAPES を用いることで，これらを1つのこととしてまとめて考えさせることが可能になります。以下のように操作してみてください。

「GRAPES を立ち上げ」→「座標エリアで右クリック」→「点を打つ」で「A」でクリック。同様に「B」もクリックし，そのあと「点を結ぶ」でドラッグして線を結びます。もちろん，そのあと，「点を結ぶ」は，解除しておいてください。

そして，次に「基本図形」の作成からPを選んで，一番左端の「点」を選んでみてください【No.29 p.25】。

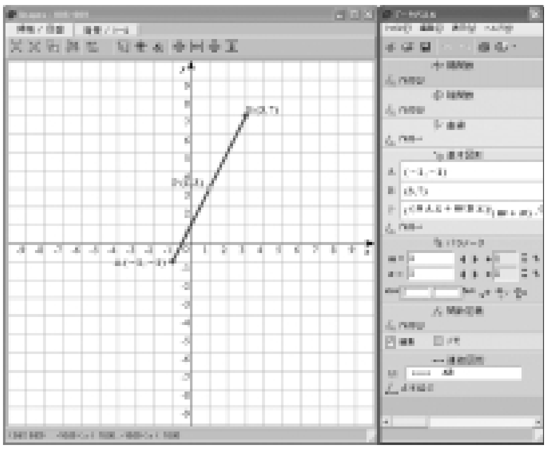
No.29 の p.25 では，「ベクトル表記」にしていますが，ここはベクトル表記にしないで，x と y にそれぞれ次のように入れます。

（図4）

おわかりでしょうか。要するに，点A，Bの x 座標や y 座標を利用しているわけです。しかしこれだけでは，点A，Bなどの文字が表示されませんので，先頭の「！」マークの前にAやBを書き込みます。点Aで言えば「A!{X}//座標」ですし，点Bで言えば「B!{X}//座標」とします。

また，肝心な点Pは，はっきりわかるように色を変え，また，中抜きにすると良いかと考えます。そして，このPにも，いろいろな座標を表示させる意味合いからも，ラベルのところは，点A，Bと同様に「P!{X}//座標」とします。なお，画面の位置関係により座標の表示がうまく出ない場合もありますので，ラベルの位置は適宜変更してください。また，GRAPES は，初期状態では表示が，「$-5 \leqq x \leqq 5$」，「$-5 \leqq y \leqq 5$」になっています。外分のことも考えると，ぜひ「$-10 \leqq x \leqq 10$」，「$-10 \leqq y \leqq 10$」にしておいてください。やり方は原点のところで，右クリックし，「ZOOM」で「×1/2」です。そしてまた，画面上側の「目盛を狭くする」を選んで座標を表示させましょう。これで，いろいろと動かしてください。ここでも前ページ同様，パソコンの「CTRL」キーを押しながら，点をつまんでみてください。いわゆる「格子点」にのみ点が移動するようになります。

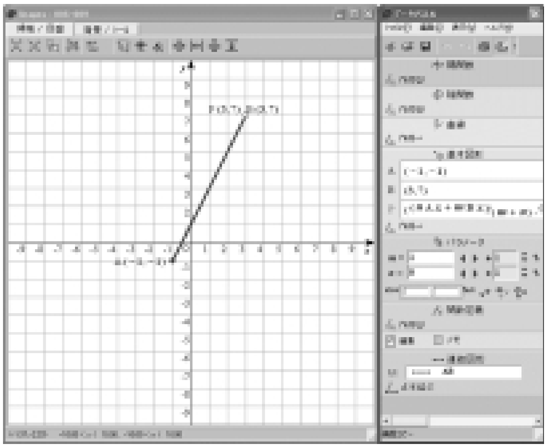
ここまでで，点Aを（−1，−1），点Bを（3，7）とおいたところの表示が図5です。パラメータ m や n の初期値は1なので，ここではちょうど，点A，点Bの中点Pが（1，3）として示されています。



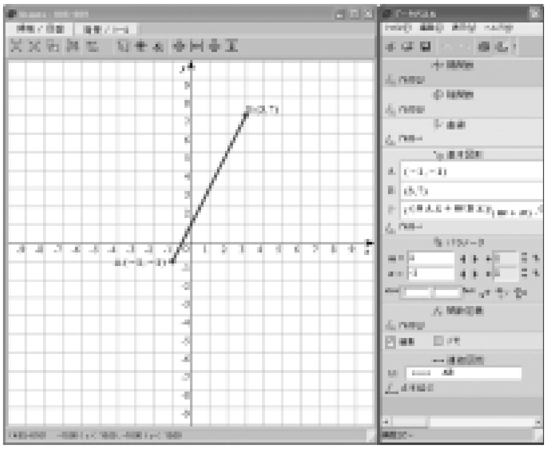
（図5）

さて，図5の画面右側のパラメータの変化の量が，初期値の「+0.1」ではなく「+1」になっているのにお気づきでしょうか。ここは m や n を整数にしておいたほうがわかりやすいと考えました。

さてここまで設定してしまえば，これだけで，ここから非常に意味あることに気づくことができます。mを１に固定しておいて，nをいろいろと変化させてみましょう。nの数値を増やす分には内分点がいろいろと変化することになります。次は逆にnの数値を減らしてみましょう。注目すべきは，$n=0$の時，そして$n=-1$の時，さらに$n=-2$の時から始まる外分点としての表示です。

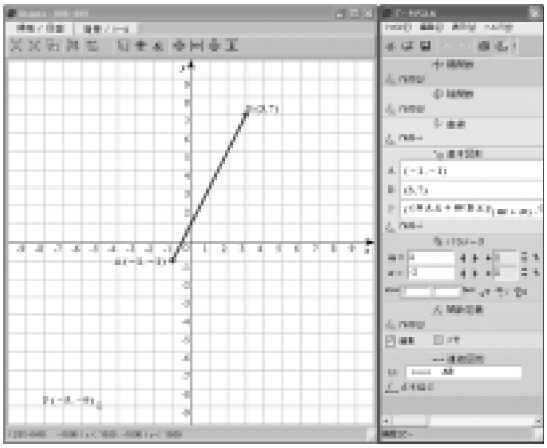


（図６）$n=0$ の時，点Ｂと同じ位置

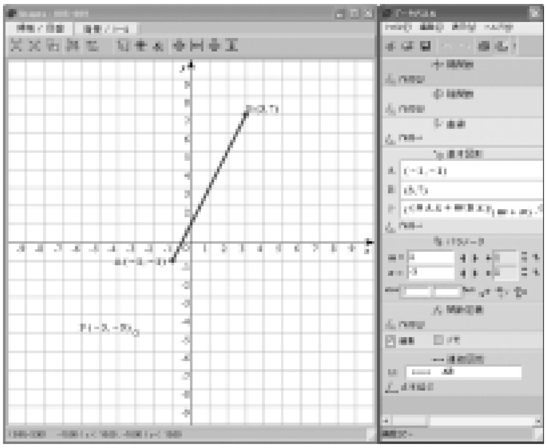


（図７）$n=-1$の時，点は存在しない

nがプラスの時は，内分点として存在していました。そして，$n=0$や$n=-1$の時というものは，通常は授業では扱わないものです。しかし，その存在意味を考えてみることは重要です。さらに$n=-2$の時，それまで，内分点として扱っていた点がいきなり外分点として，表示されました。さらに$n=-4$，$n=-5$，$n=-6$と，数値を小さくし



（図８）$n=-2$の時，点Ｐが1:2の外分点として発生



（図９）$n=-3$の時,点Ｐが1：3の外分点として存在

ていくと，どんどん点Aに近づいていくのがわかります。

ここでnの数値を大きくした場合に点Pが移動する方向と，逆に数値を小さくした場合に点Pが移動する方向が，プラス（内分）でもマイナス（外分）でも同じことがわかります。ここなどは，まさにGRAPESを連続的に数値変化する形で用いたことで，内分と外分が，同じ意味合いを持つことを生徒たちに認識させることができます。この同じ意味合いを持つことは，このあとに軌跡のところを学習するときに出てくる「アポロニウスの円」のところで，「この直線上にない『比の値が同じ点』」としても生徒たちに認識させることができます。なお，紙数の都合から，mの数値変化については省略させていただきます。生徒たちに「発見」させてみてください。

●直線の方程式（教科書 p.50）

さて，ここのところですが，まず生徒たちに示したいのは，「点（$x1$，$y1$）を通り，傾きmの直線の方程式」でしょうか。

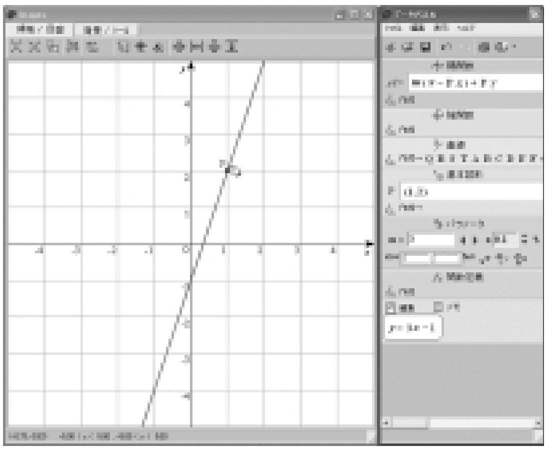
まず，「点が１つ決まっただけでは，直線の方程式は，決定できないんだよ」ということを認識させましょう。

任意の点Aをとります。「GRAPESを立ち上げ」→「座標エリアで右クリック」→「点を打つ」で「P」でクリック。そして，陽関数の作成をクリックします。（確かに，教科書どおりでしたら，陰関数を使いたいところですが，描画が早いので，陽関数にしました）そして，$y1$=のところに，$m(x-\mathrm{P.x})+\mathrm{P.y}$と入れます。

パラメータmが発生して，これを変化させると点Ｐのところが，あたかも，バトンの中心のような形で，クルクルと回ります。点Ｐは，当然ドラッグできますから，いろいろと動かせます。

さて，ここで，この表示されている関数を式として表現したいですね。これらを生徒たちに求めさせるのも中学時代の復習の意味もあり，１つの授業のやり方だと思います。しかし，式を常に表示しておきたい場合は，画面右下の「メモ」をクリックして，半角で，{y =}?{y1}と入れてOKとします【No.29 p.7】。

すると，これだけで，現在，表示されているグラフが式となって表示されますので感動的です。



（図10）

もちろん，「CTRL」キーを押しながらのドラッグで格子点へ移動させたほうがハッキリした式がでてきます。

さて，本題に戻りますが，mをいろいろと変化させて，１つの数値を決めることで，グラフの式が決定することを認識させましょう。そして，さらにもう１つは，点Ｐ以外の点を決めてあげることで式が決定できるということです。

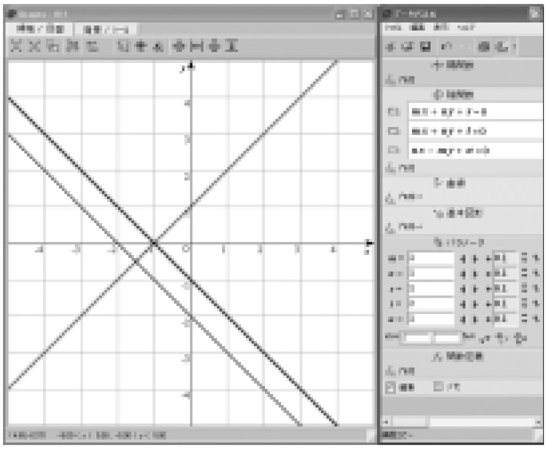
ここの授業のやり方なのですが，「２点を通る直線の式」から，グラフの式をだすと思います。そして，式がでたら，２点のうちの片方の点とでた式の傾きyを使って実際に移動させて試してみてみてください。そして次に，先ほど使わなかったもう１点が，そのグラフに乗っていることがここで認識されると思います。

いろいろなやり方を見せることで，生徒たちの頭の中では，断片的なものが，徐々につながっていくと考えられます。

●２直線の平行と垂直（教科書 p.52）

まず，平行のほうですが，$y1=ax+b$，$y2=ax+c$として，いろいろ動かすのが無難なところでしょうか。そして色を変えるなどして，$y3=-\dfrac{1}{a}x+d$としてあげることで，垂直に関しても確認できます。

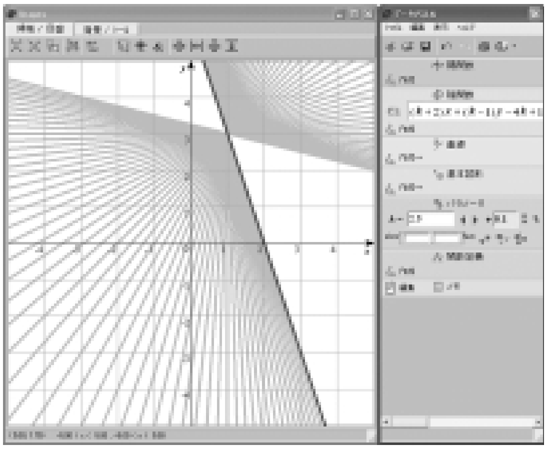
同様に陰関数に，$mx+ny+s=0$，$mx+ny+t=0$として平行を確認し，また，$nx-my+u=0$とすることで，垂直を確認することができます。当たり前のことですが，陽関数で作った場合は，aがゼロになるときの$y3$は，表示できません。しかし，陰関数のほうは，縦１本の線が綺麗にでてきます。ここを見せるのもとても意味のあることです。



（図11）

さて，ここで，本教科書では，p.78の「話題」として，取り上げていることをお話しいたしましょ

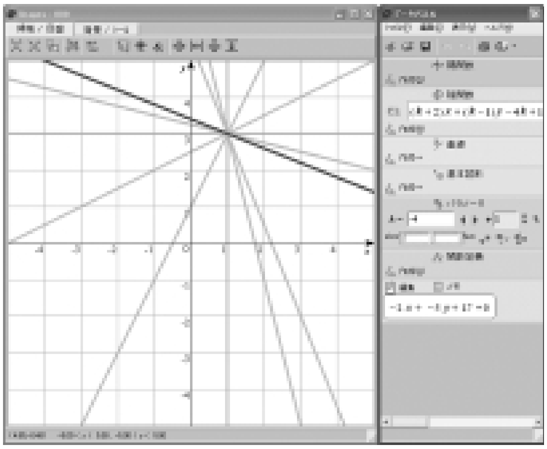
う。『高等学校数学Ⅱ』では，１つの単元として扱っているところなのですが，それは，「２直線の交点を通る直線」のところです。『高等学校数学Ⅱ』p.59の例題７は次のようなものです。「kを定数とするとき，直線 $(k+2)x+(k-1)y-4k+1=0$ は，kの値に関係なく，ある２直線の交点を通ることを示せ。」そう，私は授業中のこの時点で生徒たちに教科書を閉じさせます。そしてとにかく，そのままGRAPESの陰関数にこの式を入れ動きを見せてみます。図12をご覧ください。



（図12）

上図は，わざと残像にチェックを入れたものです。実際の授業では，初めに見せるときは，残像を示しません。授業では，「とにかく，どこかの点を必ず通るらしいよ」という働きかけをして，このような残像ができるような動きをすることは一切言いません。とにかく，目を凝らして見てもらいます。すると，生徒たちは徐々に気づいてくるでしょう。一点を中心に，グルグル回っている様子を私はよく，「まるでバトンのようにクルクルと回る」という言葉を使って表現しています。そして，「バトンの中心がどこになるかを見つけよう」という働きかけをしていきます。このように，残像が示されればはっきりしますが，示されない状態では，最初生徒たちは戸惑います。良く目を凝らして見つけてもらいます。するとやがて発見することはできるでしょう。この時点で，残像を有りにして再度パラメータを変化させることで，確実に確認ができると思います。

そうしましたら，次に，では，このバトンの中心は一体何なのか。なぜ，こういう点が，この式から発生したのかということを考えさせます。そのヒントとして，図12を改良した図13のGRAPESファイルを見せてあげます。その改良点は２つあります。まず，パラメータの増減を例によって「+1」としたこと。そして，メモ欄（図14）に式を作ってパラメータが変化するごとに現れる式を表示させたところにあります。



（図13）

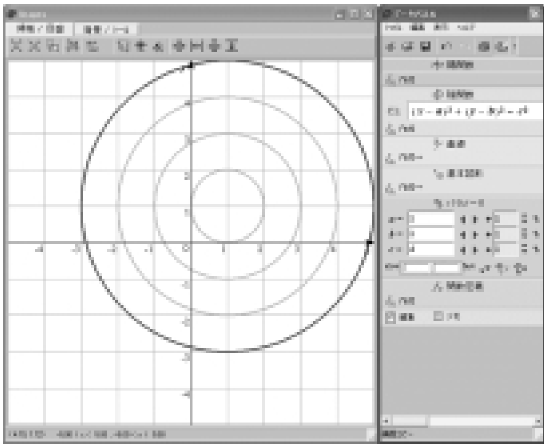
（図14）

こうすることで，生徒たちは，kというパラメータが変化するたびに，１つひとつの式が決定しているということが確認できます。ここは重要なところでしょう。そしてこの時点で，教科書を開けさせます。与えられた式を，

$k(x+y-4)+(2x-y+1)=0$ と変形して連立方程式にしているという意味がここで確認できるわけです。

●円の方程式（教科書p.60）

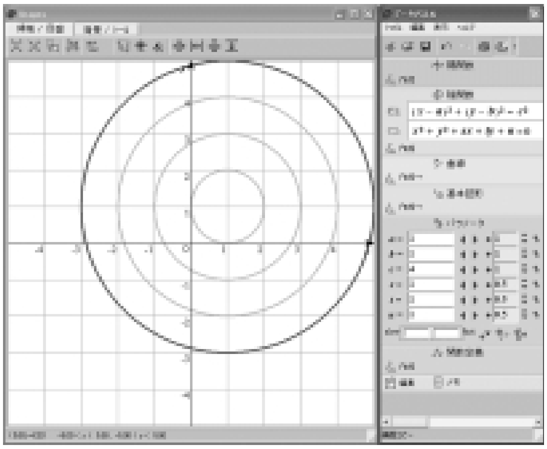
円に関してですが，ここはまず単純に，陰関数に，$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$と入れてa，b，cの数値をいろいろと変化させてみましょう。GRAPESでは，rは，パラメータではありません。お気をつけください。図15をごらんください。



（図15）

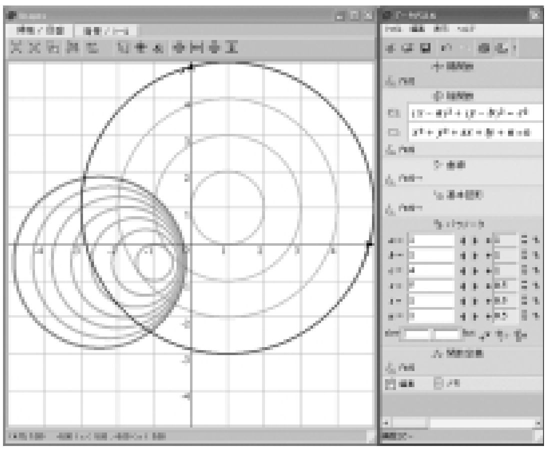
上図ですが，半径を増やしていったところです。ここでも，パラメータの増減は「+1」にしてあります。平行移動や半径の増え方は，整数値のほうが見やすいかと考えます。もちろん，aもbもゼロになった場合は中心が原点となり，$x^2+y^2=c^2$の形に一致することが確認できると思います。そして，cの値を減らしてみましょう。cがゼロになると，かすかに点だけが表示されるのが，わかります。そしてcをマイナスにしますと，本来は存在しないはずが，円を描いてしまいます。－1の時は1と同じ。－2の時は2と同じ。ここで，なぜ表示してしまうのかを考えさせるのも面白いと思います。ちなみに右辺を，c^2からたんにcに代えてみましょう。今度は半径の2乗の数値がcの持つ意味ということを確認してから，ゼロやマイナスにしてみましょう。今度は予想とおりの結果が得られることになります。

さて，次に教科書では，$x^2+y^2+lx+my+n=0$の表す図形という項目がでてきて，これが円を表すということ平方完成を使って示しています。そこで，早速GRAPESの先ほどの陰関数の次の式として，これを入れてみましょう。しかし，l，m，nの3つの文字がそろわないので，s，t，uを使ってみました（パラメータの増減は，ここは+0.5にしてみました）。式を入れて，円が表示されると思いきや，表示されません（図16）。



（図16）

GRAPESの各パラメータの初期値が1なので，s，t，uすべてが1となっていて，平方完成した場合右辺がマイナスになってしまう状態なのです。ここなど，なぜ表示されないのかという発問で確認することができます。そして，s，t，uの値を変えることで，突如，円が発生します（図17）。ここで，s，t，uの各パラメータを変化させると円がどのように動き変化していくか。これなども，GRAPESを使う醍醐味と言えるところでしょう。ここは数学Iの時の$y=ax^2+bx+c$のa，b，cのそれぞれのパラメータの意味と関連づけて考えさせることができますが，やや発展学習ということになります【No.21（29ではなく）p.12～13】。



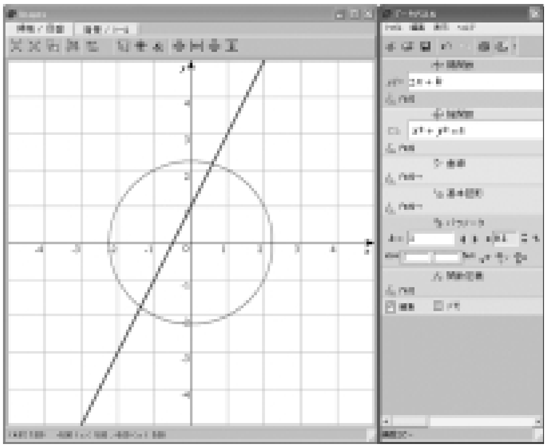
（図17）

さて，発展学習は時間があったらということにしておいて

$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$，$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の各パラメータをいろいろと変化させて一致させてみましょう。ここで黒板で平方完成した形を見せGRAPESと一致させることで中心や半径をさらに確認することができます。しかも，片方の円のグラフが動いていって，もう片方に一致したことが大きな意味あることとして考えられるわけです。

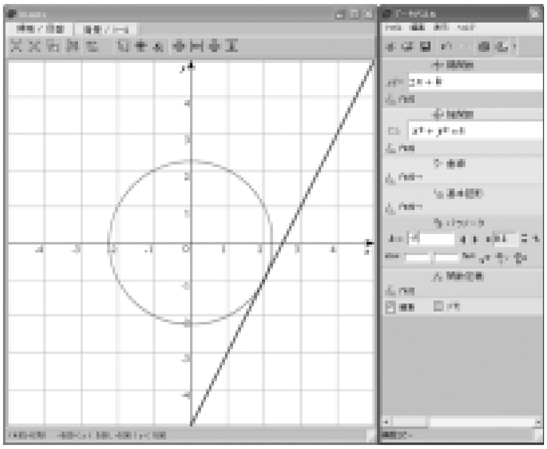
●円と直線の位置関係（教科書 p.64）

ここのところは，生徒たちも容易にイメージできるところかもしれません。しかし，やはり百聞は一見にしかずというわけで，ぜひ授業中に見せてあげたいですね。教科書の例題は，$x^2+y^2=5$ と $y=2x+k$ の位置関係の問題です（図18）。



（図18）

パラメータkを，いろいろと変化させることによって，直線のグラフが平行移動していきます。

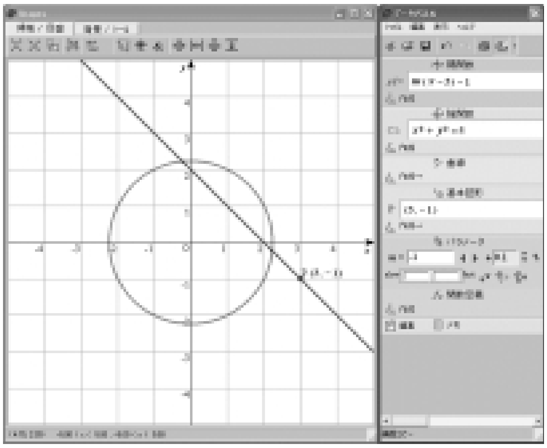


（図19）

当たり前のことですが，この k がこの直線のグラフの y 切片を示すということを再認識させることができます。そして k が５の時と－5の時にちょうど円に接する様子を見ることができます（図19）。また，$-5<k<5$ の時，ちょうど円と２点を共有している様子や，逆に $k<-5$，$5<k$ の時は，共有点がない様子も，はっきりとわかります。

いずれにせよ判別式で求めた k の範囲をグラフで見て確かめることができるものです。

次に，「円外の点からひいた接線」の例題があります。これなども，生徒たちにみせる場合は，最終的な解答が，きちんと整数で出るものをお薦めいたします。さて，図20をご覧ください。



（図20）

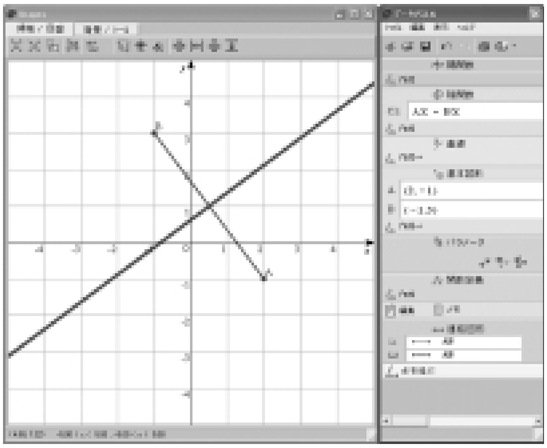
上図は，教科書 p.66 の練習25「点（3，－1）から円 $x^2+y^2=5$ にひいた接線の方程式および接点の座標を求めよ。」をGRAPESファイルに入れたものです。

まず，陽関数に $y1=m(x-3)-1$ を入れました。これで，点（3，－1）を「バトンの中心」のように，クルクルと回すことができます。念のため，この点（3，－1）をはっきりするために，点Pとして，（3，－1）を表示させました。また，円のほうは，$x^2+y^2=5$ を陰関数に入れました。これで，m を動かすたびことに，陽関数の $y1=m(x-3)-1$ が，いろいろと変わることになります。さて，ここで，以前にも紹介しましたが，編集のところに，{y＝}?{y1}と，打ち込むことで，$y1$のグラフの式が表示されます。しかし，これは良し悪しです。表示させないでおいて，表示されるグラフ１つひとつの式を考えさせるというのも大変重要なことです。

● 軌跡（教科書 p.68）

軌跡の単元は，それこそ GRAPES が大活躍できるところです。

最初は，「２点から等距離にある点の軌跡」ということで，「２点A（2，−1），B（−1，3）から等距離にある点Ｐの軌跡を求めよ」という例題が出ています。例によって，座標画面上で右クリックし，適当に点Ａと点Ｂを打ちます。例によってキーボードの「CTRL」キーを押しながらドラッグし，それぞれの座標の位置に持ってきます。そして，また右クリックし，「点を結ぶ」により，２点を結んでおきましょう。必ずここで，「点を結ぶ」を解除しておくことをお忘れなく。さて，GRAPES では，便利な，ラージＸという文字が用意されています。陰関数のところで，大文字のアルファベットが並んでいるところで，AX＝BX としてみてください。すると，ベクトルの記号が自動的についてしまいます。実は作者の友田先生がベクトルの分野でも使用できるようにしてくださったことからこのようになったそうです。今回は，いわゆる長さである大きさが等しいということで，絶対値を表す記号の[ ]で，AX と BX をくくってみてください。すなわち，[AX]＝[BX]とします。これで，OK としたのが，図 21 です。

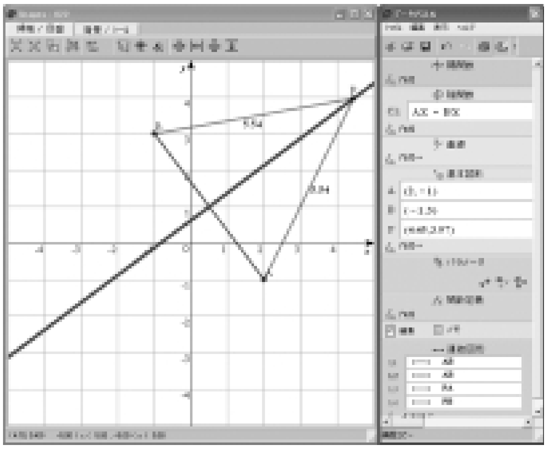


（図21）

一瞬で，垂直二等分線が表れます。そして，点ＡやＢをマウスでつまんで，いろいろと動かしてみてください。垂直二等分線がそれぞれの点に応じていろいろと動く様子を見ることができます。しかし，この形ですと，生徒たちにとって見ればいきなり垂直二等分線が表れたわけで，「軌跡」としてでてきたという感覚が薄いですね。そこで，任意の点Ｐをおき，その点と点Ａ，点Ｂとの距離が等しくなることを確認してみましょう。「点を結ぶ」を選んで点Ｐと点Ａを結び，その際，「連結図形のプロパティ」ではラベルで長さの表示を選びます。点Ｐと点Ｂも同様に行います。

（図22）

そして，点Ｐをドラッグして，垂直二等分線上に持っていった図が，図 23 となります。

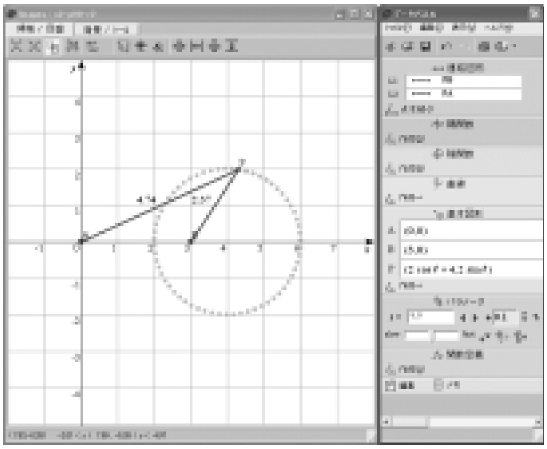


（図23）

これにより，両方の長さが等しいことが，わかります。しかし，なんだかこれでは，先に直線をみせてしまって，それから位置関係を確認しているという感じを生徒たちは持つでしょう。そこで，次に出てくる「アポロニウスの円」では，もう少

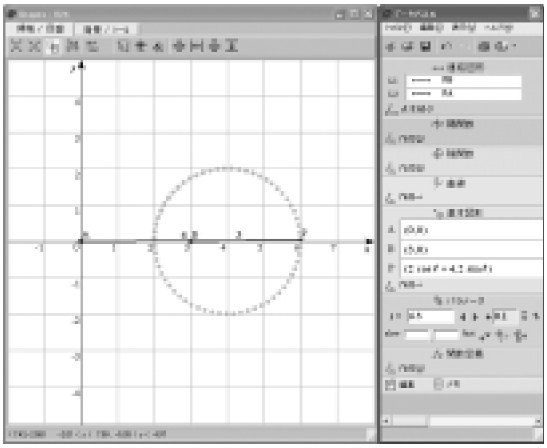
し工夫します。アポロニウスの円のところには，教科書p.69に「２点A(0, 0)，B(3, 0)に対して，AP：BP＝２：１である点Pの軌跡を求めよ。」という例題が出ています。点A及び点Bをプロットして，(0, 0)と(3, 0)におきます。そして，点Pのx座標を，$2\cos t+4$さらにy座標の式を$2\sin t$とおきます。おわかりでしょうか。初めに結果ありき，なのですが半径が２，そして中心が（4, 0）と知っているので，こうおいてしまうのです。しかし，生徒たちには黙っています。そして，座標画面で，「右クリック」「点を結ぶ」とし，AP，BPを結び，本号のp.2のように，長さの表示にします。

この状態で，パラメータtを動かしてみます。



（図24）

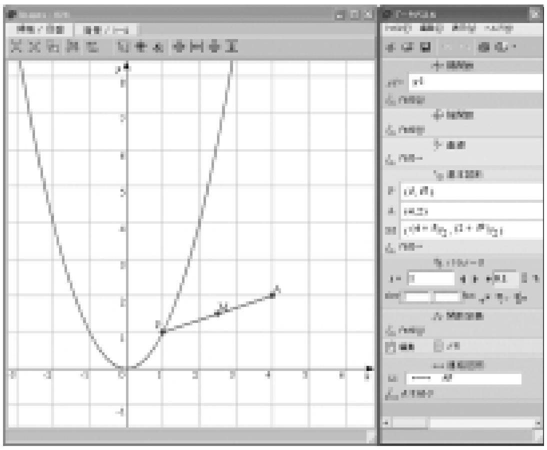
すると，APの長さとBPの長さの比率が，どこをとっても，２：１の関係になっているのが，わかります。途中，誤差の範囲で，小数第３位が同じにならないこともありますが，それは原因を考えさせると面白いでしょう。そして，アポロニウスの円は，内分・外分とも関連づけられる話を，本号p.4で述べました。tというパラメータをいろいろと動かして，ちょうど，点（2, 0）のところにきたときには，APの長さは２でBPの長さは１です。また，点(6, 0)のところに来たときには，APの長さは６でBPの長さは３です（図25）。当たり前のこととはいえ，ここで，このアポロニウスの円についてのさらなる話が，いろいろとできる箇所です。さて，GRAPESを使った授業のやり方では，ちょっと，面白い展開ができます。それは，軌跡の様子が先にわかってしまうため，でてくる



（図25）

式を先に求めることができ，それで復習ができるという授業の形をとることができます。例えば，上の図25などでは，中心が（4, 0）で，半径が２であることがわかりますから，それらの式が，いわゆる一般的な求め方で求めたものと一致するかどうかということを考えることができます。ここで具体例を示しますが，こういう問題があります。

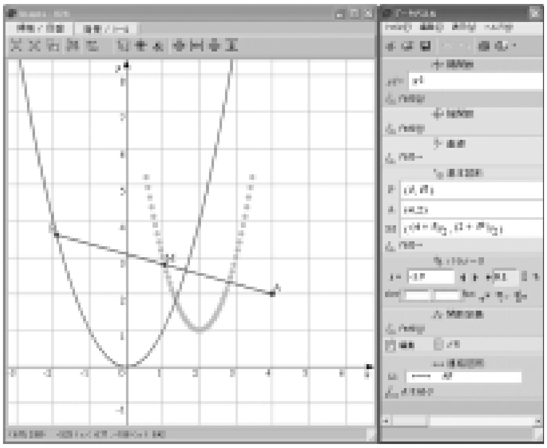
２次関数のグラフ上を動く点と，定点との内分点の問題です。例えば，文英堂の『シグマトライ数学Ⅱ＋B新課程版』のp.114標準例題92に，次のような問題があります。「点Pが放物線$y=x^2$上を動くとき，点A(4, 2)とPを結んだ線分APの中点Mの軌跡を求めよ。」



（図26）

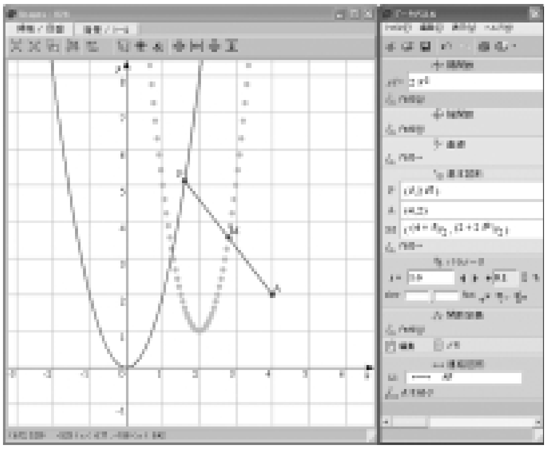
例によって，以下のようにおいてみます。陽関数の$y1=x^2$，基本図形のPを点で指定して，x座標をt，　y座標をt^2残像には，チェックを入れておきます。また，基本図形のAも点で指定して，x

座標を4, y座標を2に設定。そして，中点のMは，x座標を$(4+t)/2$, y座標を$(2+t^2)/2$に設定。点Aと点Pは，結んでおきましょう。そのおいた直後の図が図26です。そして，パラメータtを変化させて，軌跡の様子を示したのが図27です。



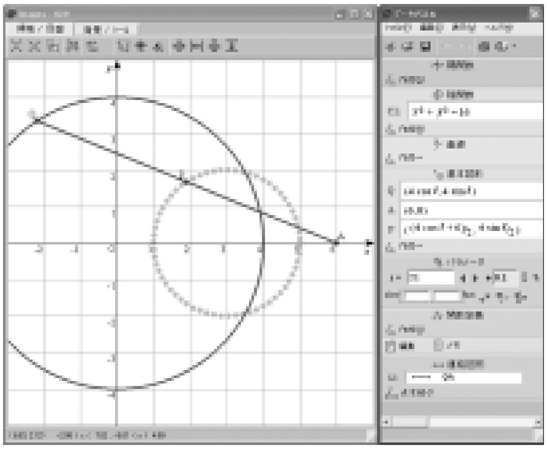
（図27）

現れた軌跡の様子は２次関数です。２次関数は，数学Ⅰの範囲ですから，生徒たちは，このでてきた２次関数の式を求められる「はず」です。頂点も示されていて，通過点もハッキリしている。しかし，ここで，昔の記憶をたぐり寄せる生徒たちも多いのではないでしょうか。本校の生徒たちもやはりそうです。しかし，ここの復習に何分かかっても，やはりここは数学の授業としては重要なところだと考えます。数学Ⅰが，こんなところででてきたと驚く生徒もいるでしょう。しかし，数学Ⅰの単位をとったらそれでおしまいで，次は数学Ⅱと考える生徒たちが多い中で，「あくまで数学はつながっているんだよ。」と示す絶好の機会です。これなども，GRAPESがなければ，たんに中点の式から，もとの式に代入して，最終的に，$y=2x^2-8x+9$を求めておしまいでしょう。しかし，上記の授業のやり方でしたら，頂点と通過点から，標準形が求まり，さらにそれを展開することで，一般形を求めることができます。この一般形まで，たどり着いたときに，生徒たちは，「つながった」を実感することになると考えます（実際に，本校では，この例題を取り上げました）。さて，この問題は，さらに面白い要素が含まれているようです。それは，もとの式が$y=ax^2$のaが1だったとき，求めた式のx^2の係数は2でした。それならば，と，もとの式を$y=2x^2$にして，パラメータyを変化させてみると。それが図28です。



（図28）

予想どおりというのも変ですが，でてきた式のx^2の係数は４になりました。これなども，トピックとして生徒たちに与えるのは面白いと思います。このように軌跡の状態が先に見えてしまう場合の授業展開はこれまでのそれと大きく変わってきます。次の例をご覧ください。教科書p.70例題12「点Qが，円$x^2+y^2=16$上を動くとき，Qと定点A（6，0)を結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。」例によって陰関数に$x^2+y^2=16$ 基本図形の点Qはx座標を$4\cos t$, y座標を$4\sin t$に設定。また中点のPは，x座標を$(4\cos t+6)/2$, y座標を$(4\sin t)/2$と設定したのが，以下の図29です。

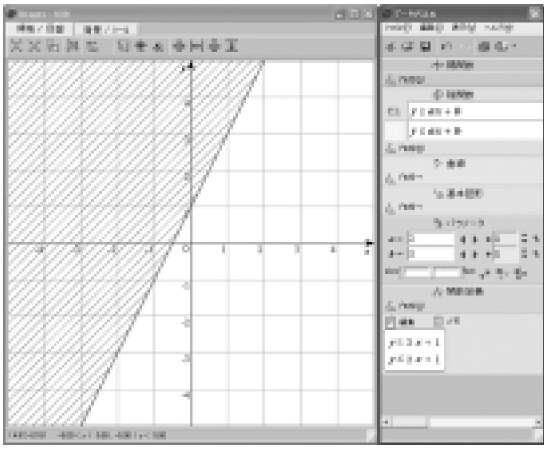


（図29）

これなども，中心が(3，0)半径２の円の方程式を先に求め，答えを導いたときに，そこにたどり着くかのワクワク感を感じる授業展開が可能です。

●不等式の表す領域（教科書 p.71）

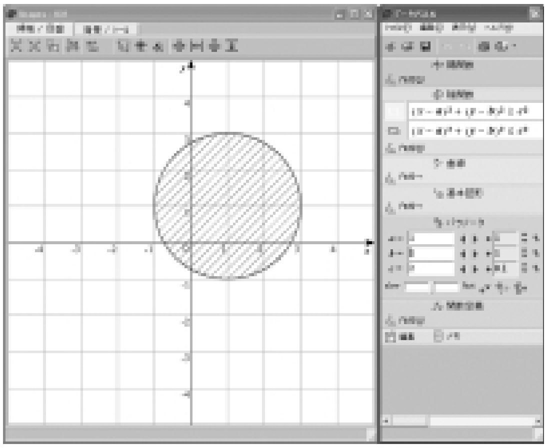
GRAPESのすばらしさは，たんにグラフのみを示すだけにとどまらず，領域（エリア）も示してしまうところにあります。ここは，単純に，陰関数のC1のところに，$y \geqq ax+b$としてみました。メモのところには，{y≧}!{a}{x+}!{b}として，できあがった式が見えるようにしました。（あまり意味がないかもしれませんが）そして，パラメータの増減量は，整数のほうが見やすいかと「+1」としました。そう，そしてここでもう1つ，陰関数のC2に，$y \leqq ax+b$としてみました。メモ欄も同様です。そして，「C2」という文字をクリックして，「C2」を非表示にしたのです。それが図30です。



（図30）

この状態でパラメータをいろいろと変化させてみましょう。よく授業中に，「どちら側を塗りつぶすか」を考える際に，原点(0，0)の座標を代入してみるということをやるかと思います。今回のこの例でaやbを変化させたときに，原点が含まれたり，含まれなかったりする様子がはっきりとわかります。また，C1とC2を適宜，表示，非表示にすることで，領域の反対側がはっきりと示されているのがわかります。

そして，ぜひ見ていただきたいのは，aがゼロになる場合です。縦や横の一直線の線を境目にして，どちら側が表示されるか。はっきりと区別することができます。また，同様に円も同じように表示することができます。ここは，せっかくですので，C1に，$(x-a)^2+(y-b)^2 \geqq c^2$そして，C2に，$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq c^2$を入れて，3つのパラメータをいろいろと変化させてみましょう。



（図31）

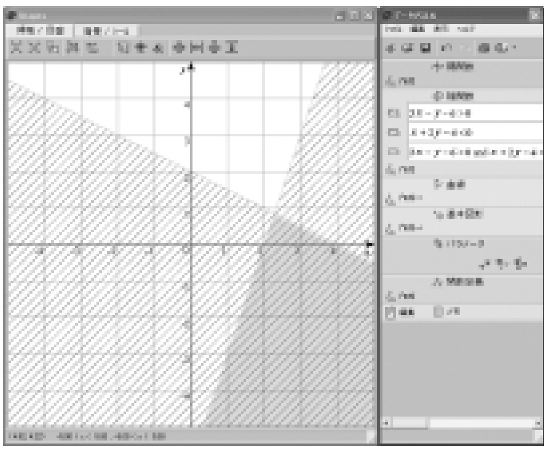
円が平行移動する様子や，半径がちょうどゼロになった場合，ほんの1点だけが表示される様子をみることができます。そしてここでも，a，bの増加量を「+1」としてみました。半径は初期値の「+0.1」のままです。半径は，ずんずんと大きくなったほうがなんとなくリアルな感じがします。

● 連立不等式の表す領域（教科書 p.73）

GRAPESでは，連立不等式も楽に表示してしまいます。教科書p.73に，次のような例題がでています。

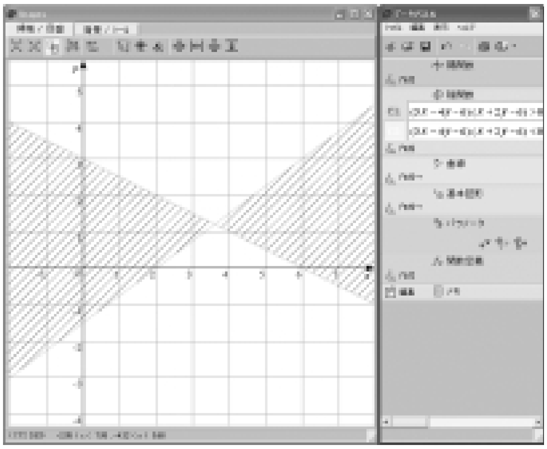
$$\begin{cases} 3x-y-6>0 \\ x+2y-4<0 \end{cases}$$

これを単純に陰関数のC1とC2に入れて，表示することもできます。しかし，ここで一工夫して，陰関数のC3のところに，$(3x-y-6>0)$and$(x+2y-4<0)$と入れ，表示される色を例えば赤に変えてみます（図32）。

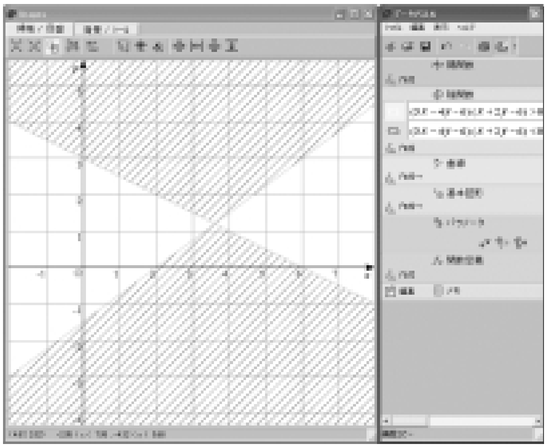


（図32）

この場合，andで囲まれる場合の（　）は，なくてもかまわないようですが，念のためにつけています。すると，C1，C2，C3の文字をクリックするだけで，範囲が表示されたり，されなかったりしますので，授業中の説明のタイミングで，表示の有無を切り替えられます。さて，連立不等式に関して一目瞭然なのが，次の例題です。教科書p.73「次の不等式の表す領域を図示せよ。$(3x-4y-6)(x+2y-6)>0$」これも，単純にC1に，$(3x-4y-6)(x+2y-6)>0$ を入れるだけでなく，C 2に，$(3x-4y-6)(x+2y-6)<0$ を入れてみます。上記に書いてあるように，C1，C2の文字をクリックして，両方の場合の比較をさせてみましょう（図33と図34）。



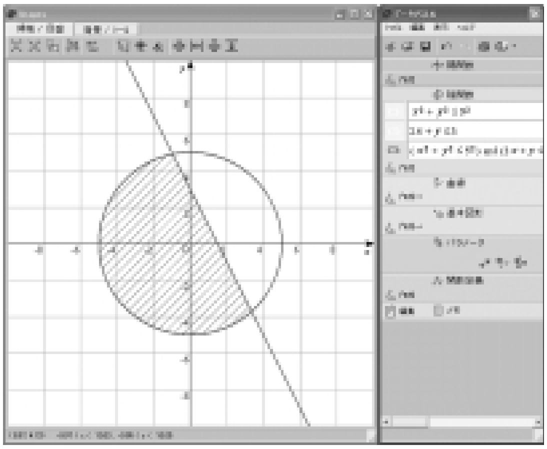
（図33）



（図34）

この後，教科書では，この式を連立不等式に分解してグラフを描く説明があります。逆にそれらを，この画面から説明することで，その意味が充分に把握できると考えます。

また，この後，円の内側・外側，及び直線の上側・下側との連立を表す問題がでています。これなども，これまでやってきたことと同様に生徒たちに見せることができます（図35）。

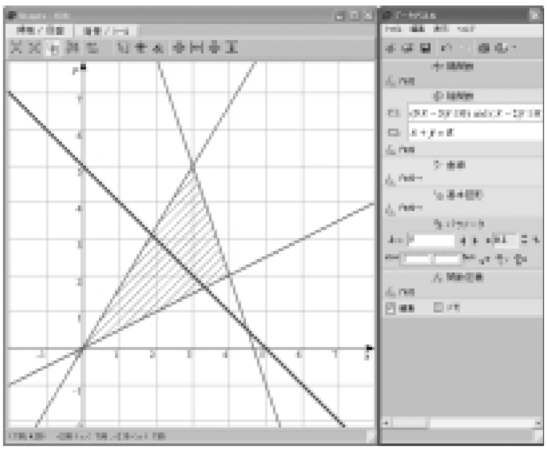


（図35）

●領域における最大値・最小値（教科書p.74）

「３つの不等式 $5x-3y\geqq 0$，$x-2y\leqq 0$，$3x+y-14\leqq 0$ を満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域Dは，図に示した内部である。この領域Dにおける$x+y$の値の最大値と最小値を求めよう。」

　いわゆる線形計画法のところです。GRAPESを知らなかった遠い昔，黒板にグラフを描いて，掃除のモップの柄でも使って説明したものです。図36は，上記の例題をGRAPESで表現したものです。



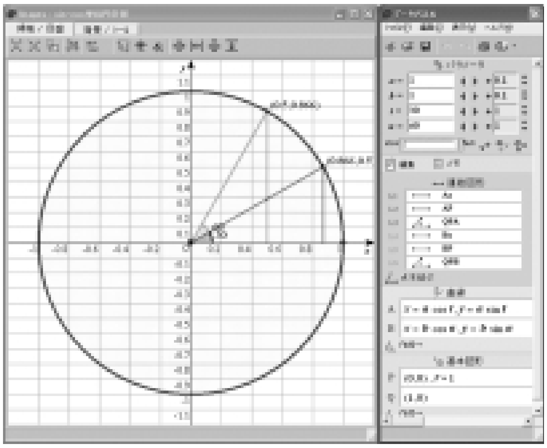
（図36）

しかし，kを動かして説明しなくても，体を使ってモップの柄で説明してもよいかと思います。いかに生徒たちに印象づけるかというところです。

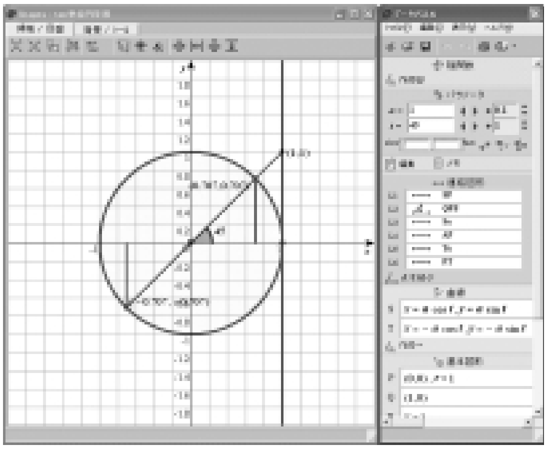
(2) いろいろな関数

●三角関数の一般角・単位円（教科書 p.80〜83）

三角関数の前半の単元では，皆さん，どのように指導されていらっしゃいますか。一般角の話をはじめ，負の角や，そして単位円の指導では，私は自ら作成した GRAPES のファイル「sin-cos 単位円」（図 37）と「tan 単位円」（図 38）とを用いて説明しております。



（図37）



（図38）

簡単に特徴を示します。「sin-cos 単位円」(図 37) では，単位円上の２つの点をクルクルと回すことができます。もちろん，１つで良い場合には，片方を非表示にすればよいわけです。それぞれの点は x 軸からの角度が表示されるようにし，２つの点のそれぞれに座標を示すようにしました。これで，x 座標がコサインの値になっており，y 座標がサインの値になっていることが確認できます。２つの点は，それぞれパラメータ t と u を変化させることで，動くようになっています。次に「tan 単位円」（図 38）のほうですが，これも，「sin-cos 単位円」と同様です。ただし，$x=1$ の縦線が引いてあり，これにぶつかった座標の y 座標がタンジェントの値になっていることが確認できます。もちろん，180 °ずれたところにも，点が存在していて，$x=1$ の縦線に近いほうに延長してぶつかるようになっています。このファイルの作成方法については，ここでは，省略させていただきます。どうぞ，「http://grapes.jp/」からダウンロードしてみてください。

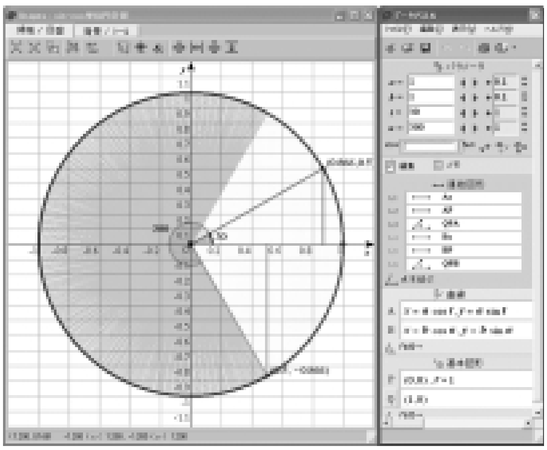
この２つのファイルがあることで，かなりのことができます。

まず，教科書 p.81 の「動径 OP の表す一般角」

$\theta=\alpha+360°\times n$（$n=0$，$\pm1$，$\pm2\cdots$）

に関して，GRAPES を使うほどではないかもしれませんが，画面の中心部分の角度の数値と，パラメータの t や u の数値に注目していただければ，それぞれの意味がつかめると思います。負の角度についても，t や u の数値がマイナスになった状態で点が止まったところの中心の角度を読みとることで，その意味を理解できます。

また，教科書 p.84 例題 1「$0 \leqq \theta < 360°$ のとき，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。」や同ページ例題 2「$0 \leqq \theta < 360°$ のとき，$\tan\theta=-1$ を満たす θ の値を求めよ。」については，まさにパラメータの t や u を動かすことで，それぞれの x 座標や y 座標を読みとることで，その意味を理解できます。



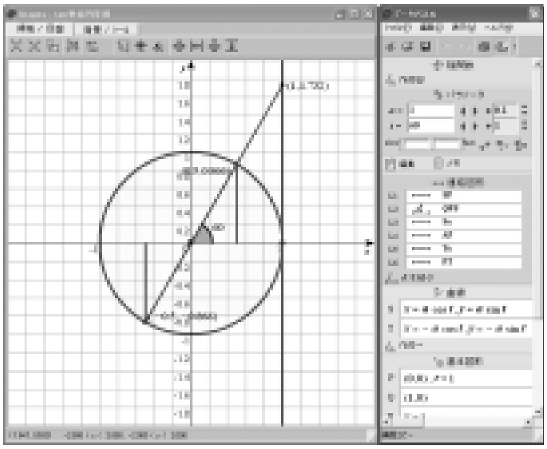
（図39）

そして，次の教科書 p.85 例題 3「$0 \leqq \theta < 360°$ の

とき，$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$ を満たすθの値を求めよ。」について は，図39のように，動径の残像にチェックを入れて動かします。この例題3は，cosの数値ですから，x座標に注目しながらパラメータの数値を動かします。まさに，一目瞭然です。

●直線の傾き（教科書p.85）

ここは，まさに，「tan単位円」（図38）を用いて見事に説明することができます。しかし，皆さま，良くご存じのように，tanの数値で，ぴったり整数になるのは，45°とか135°の時でそれ以外は小数になってしまいます。しかし，直線の傾きというものが，「xの増分に対するyの増分の割合」としての意味から，xを1にとったときのyの数値として，まさにtanが，その数値そのものであるという説明をここですることができます。



（図40）

図40は，ちょうど60°のときの様子です。tan60 ≒ $\sqrt{3}$　1.732ということで，見事に，その様子が示されています。そして，傾きも，0.2きざみで，1.6と1.8の間のやや1.8寄りのところということで，1.732を示していると考えて良いでしょう。もちろんですが，60°の前に45°で説明しておいてください。というか，「tan単位円」を立ち上げたときそのものが，45°が表示されているので，いろいろとパラメータの数値を変えてみて説明してみてください。

●三角関数の相互関係（教科書p.86）

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここのところは，数学Ⅰで学んだことの復習ということになります。みなさん，どのように授業されていますか。やはり，ここのところは，「確かにそうなっている」という確かめが重要となります。GRAPESでは，それぞれの数値を計算して表示してくれる機能もありますが，あまりここで多用しますと，それこそ，コンピュータが確認してしまっているようで，あまりよろしくありません。ここのところは，いろいろな数値を示して，手または電卓（最近は生徒の持っている携帯電話の電卓機能も）で計算させて，確認するのがよろしいかなと考えます。いかがでしょうか。

●三角関数の性質（教科書p.88）

まず，１つめに次の「θ＋360°×nの三角関数」がでています。

$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin\theta$$

$$\cos(\theta + 360^\circ \times n) = \cos\theta$$

$$\tan(\theta + 360^\circ \times n) = \tan\theta$$

（$n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$）

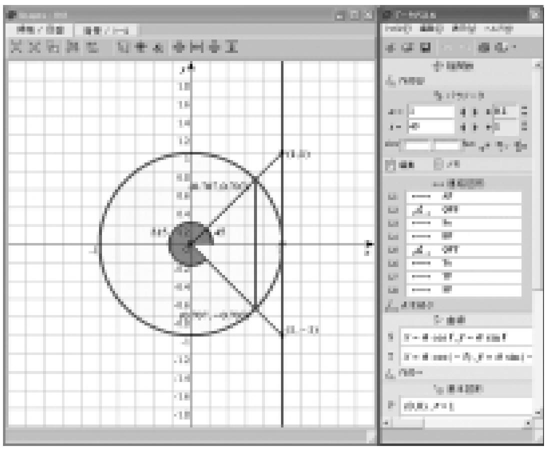
ここのところは，図37と図38をグルグルと回せばよろしいでしょう。ここでぜひやっていただきたいのが負の角です。いずれ，tan(−495°)を求めるという問題もでてきます。nがマイナスの状態というものも試していただければと思います。

次に「−θの三角関数」がでています。

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

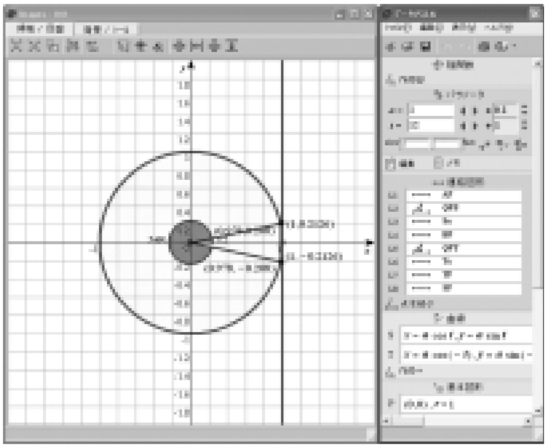
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



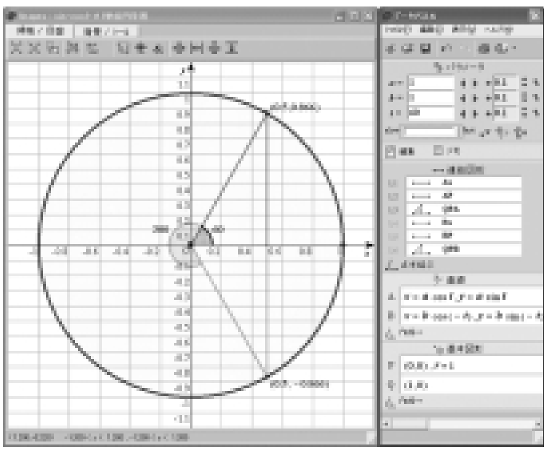
（図41）

ここは，図37と図38を少し改良したものを使ってみます。まずは，図38を改良した図41です。これは，パラメータtを変化させるだけで，すべての(θ)と(−θ)の数値によるsin，cos，tanの値を示すことができます。何のことはなく，x軸に関して対称というわけですが，それでも，実際にパラメータを変化させてみると，どんな動きになるか，目で確かめることができます。本当は，ここで，連続して変化する様子をお示ししたいところですが，紙数の都合から，12°の状態のみを図42でお示しいたします。



（図42）

単位円の円周上の点，そしてx=1上の点の，それぞれが動く動き方がたいへんリアルに見ることができます。なお，お気づきだと思いますが，「180°ずれた点」は，ここでは表示していません。これも表示してしまうと，画面上が，本当にゴチャゴチャなってしまうので，省略しています。



（図43）

また，この後に出てくる三角関数の性質でも，同様にお話しいたしますが，授業の展開の方法で，sinとcosだけに，注目させたいということもあるかと思います。そこで，図37を改良した図43をお示しいたします。これにより，tanを示さないで説明することが可能です。

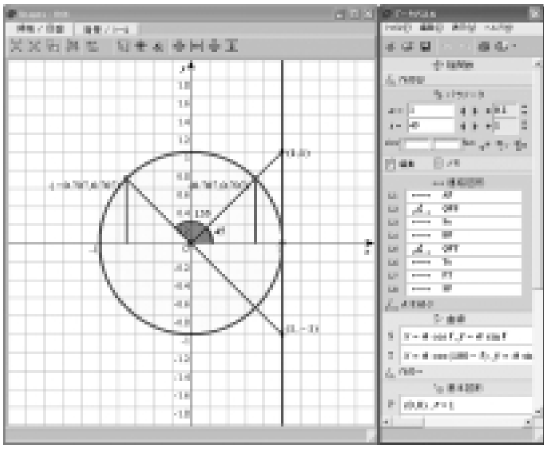
次に「180°−θの三角関数」がでています。

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

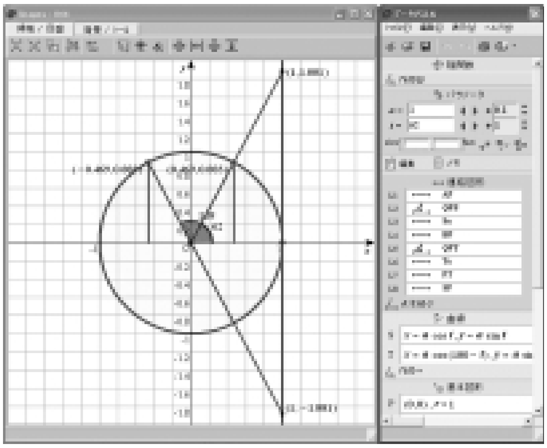
ここでも，図37と図38を少し改良したものを使ってみます。まずは，図38を改良した図44です。



（図44）

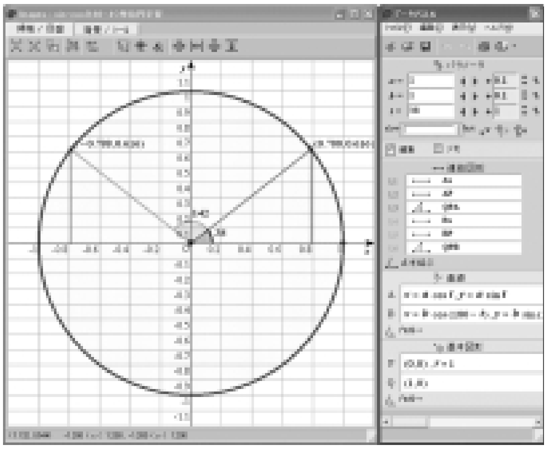
これも，パラメータtを変化させるだけで，すべての(θ)と(180°−θ)の数値によるsin，cos，tanの値を示すことができます。こちらも何のことはなく，y軸に関して対称（tanは，その位置関係からx軸について対称）というわけですが，それでも，実際にパラメータを変化させてみると，どんな動きになるか，目で確かめることができます。こちらも，１枚のみ，62°の状態を図45で，お示しいたします。

ちょっと確認ですが…
本誌の（図○○）として表示されているGRAPESファイルは，すべて「http://grapes.jp」よりダウンロードできます。どうぞ，ご利用ください。



（図45）

また，ここでも，前回同様，sin と cos だけに，注目させる場合のものとして，図37を改良した図46をお示しいたします。



（図46）

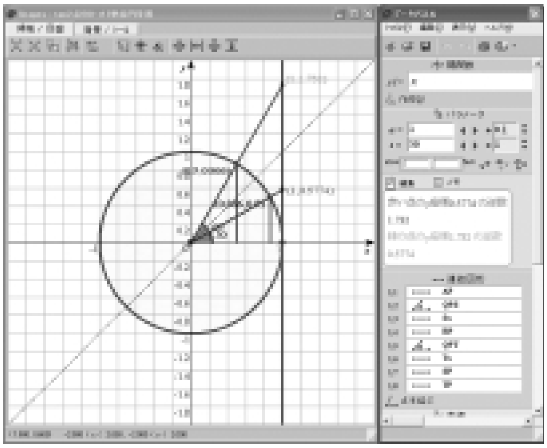
次に「90°−θの三角関数」がでています。

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$$

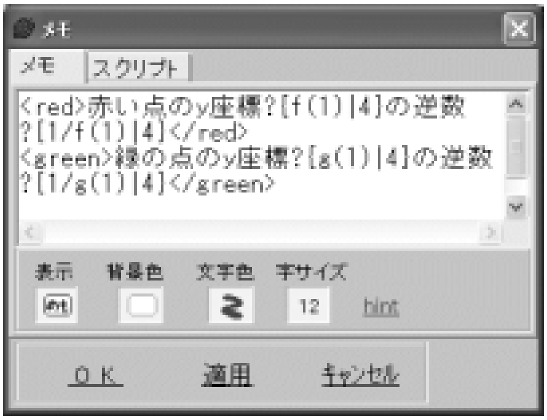
$$\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

ここでも，図37と図38を少し改良したものを使ってみます。まずは，図38を改良した図47です。90°−θの場合には，直線 $y=x$ について対称な関係ということになります。ここでは，直線 $y=x$ を破線で示してありますが，最初からこれを示さないで，生徒たちに気づかせるという方法もあります。もちろん，幾何的に説明した後の場合は，最初から示してもかまわないと考えます。



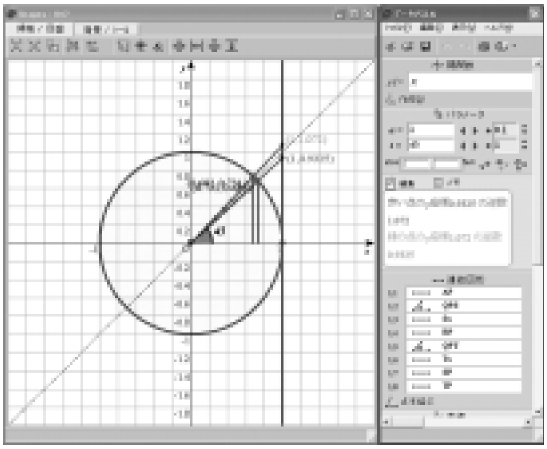
（図47）

さて，この90°−θの三角関数のtanの場合は，逆数の関係になります。それぞれの数値の逆数の関係というものは，なかなかすぐには，計算できないものです。そこで，メモ欄に，図48にように記述しました。



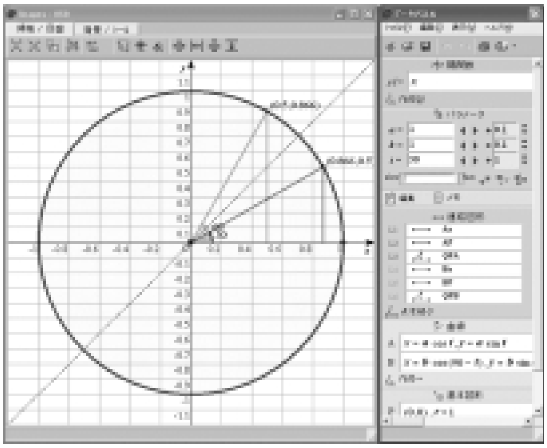
（図48）

これだけで，図47のように，赤い点と緑の点のそれぞれの数値の逆数を計算して出してくれます。そして，この図も，実際にパラメータを変化させてみると，どんな動きになるか，目で確かめることができるわけですが，ここは，紙数の都合で，45°に，結構近づいた43°の状態を見ていただきます（図49）。sin，cos，tanの３つの数値が，$y=x$ を軸にして対称になっている雰囲気がつかめると思います。



（図49）

さて，話がtanを中心に進められてきましたが，この90°－θの三角関数の場合は，sinとcosに面白い関係があります。そこでここでも，図37を改良した図50をお示しいたします。

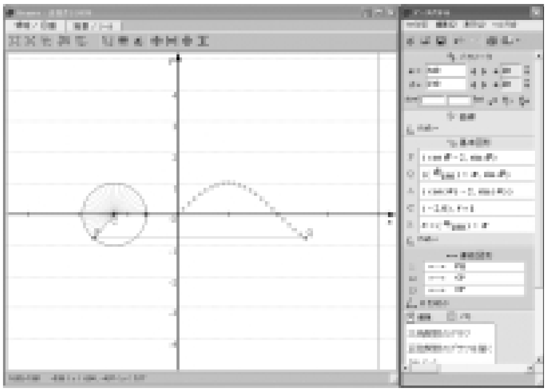


（図50）

もちろん，$y = x$ の直線を示している破線は，非表示にできます。そして，この場合，sinとcosの数値がちょうど，逆の関係を示していることがわかります。ここでの授業では，必ず，教科書の巻末についている「三角関数表」を見せてそこから気づくことを言ってもらっています。気づく生徒でしたらすぐに，sin1°がcos89°と同じ。sin2°がcos88°と同じ。以下，sin89°がcos1°と同じ。ことに気づくでしょう。しかし，それを，式にして表してごらんと言っても，生徒たちは，できそうでできないものです。そのときに，この式を見せますと，なるほどそうなのか。このようにまとめればよいのかということに気づきます。生徒たち，頭の中で，モヤモヤしたものが，式としてスッキリ晴れた時の表情には，とても良いものがあります。

●三角関数のグラフ（教科書p.93）

さて，ここから三角関数のグラフの話に入ります。本書p.1でも述べましたが，私の授業では，いきなりGRAPESの画面を見せるというようなことは，もちろんいたしません。まずは，0°から10°おきに400°までのsin，cos，tanの表を配り，ここに数値を入れてもらいます。一応確認のために，グラフ電卓を配布し，関数電卓として，利用することも可としています。しかし，多くの生徒たちは，先ほど学んだ三角関数の性質などを使ってどんどんその表を埋めていきます。そして，ここで，各自２枚，A3サイズのグラフ用紙を配布して，点をプロットして，グラフを描いてもらいます。各自２枚というのは，sinのグラフとcosのグラフは，１枚のグラフ用紙に描かせたいからです。そして，tanは，もう１枚のグラフ用紙にというわけです。そして生徒たちが描き終えてから，私は，図51を使ってsinのグラフのシミュレーションの確認を行います。



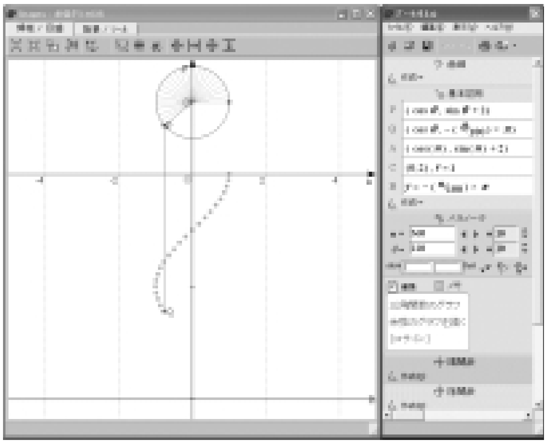
（図51）

実は，このGRAPESファイルは，完全な私のオリジナルというわけではございません。今から，6年前，ICME 9（第9回数学教育世界会議）が，千葉県の幕張でおこなわれました。私もそこにポスターセッションとして参加いたしましたが，同時に，その近くの学校を会場として行われた日本数学教育学会全国大会で，大阪府立豊島高校の鎌田先生にお会いし，いただいたものです。

それ以来，ここのところの授業では，必ず使わ

せていただいております。さて，2000年の頃とは教育課程も変わりまして，グラフのところでは，弧度法表示も入ってきています。しかし，わかりやすいのは，やはり度数法表示ではないでしょうか。この図51では，θのパラメータを使って度数で表していますが，グラフ上には，そのときの度数は表示されないようになっています。しかし，表示されないから困るかというと逆で，むしろ，表示されないままのほうが，度数法，弧度法の両方で考えるというメリットを持っています。ここのところでは，単位円からグラフが発生する様子がわかればよいので，これで充分と考えます。

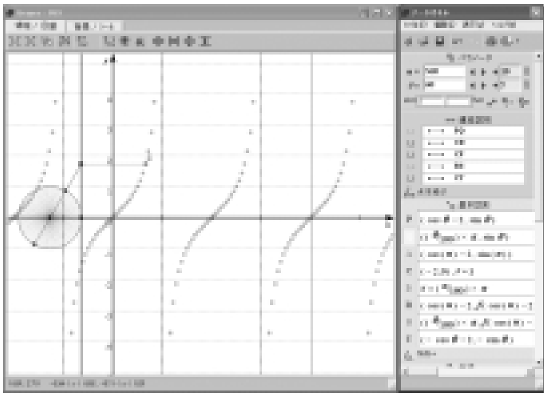
次に，cosのグラフを図52に示します。



（図52）

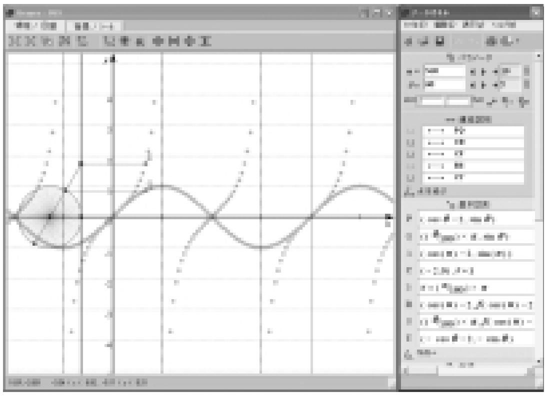
こちらも，鎌田先生の作品です。cosの意味合いからして，x 軸の下側にグラフが表示されるようになっています。これを見せるときも，生徒たちには，首を右に傾けて見せるようにしたり，また逆に，教科書のcosのグラフを右側に90°傾けさせたりして見せています。sinのグラフとの位置関係をしっかりと確認することができます。

そして，次にtanのグラフ図53です。これは，鎌田先生のファイルを参考に私が作りました。ようするに，図51を変形したものなのです。まず，大きく変えたのはパラメータの増加量です。sinやcosの時は，「+10」として，10°ずつの変化にしていたのですが，10°ずつではtanのグラフがとびとびになってしまいます。そこで，増加量を「+5」としてみました。またここで，図51では使用している点Qが，sin のカーブを描くわけですが，この点Qをtanのプロットに変えてしまおうと最



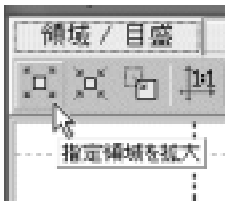
（図53）

初考えたのです。しかし，この点Qは残すことにしました。実は，sinのグラフとtanのグラフは，例えば教科書巻末の三角関数表を見てもおわかりのように，0°から25°くらいまでは，似たような値をとります。その様子をぜひとも見てもらいたくて点Qを残したのです。そして，点Sとして，tanのプロットをするように作り変えました。図53のGRAPESファイルを立ち上げると点Qが非表示になっているのがわかります。ちなみに，その点Qの非表示を解除して，sinとtanの両方を表示させせると，図54のようになります。



（図54）

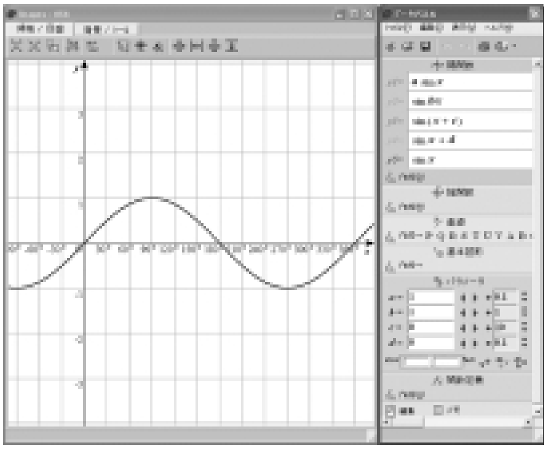
GRAPESの画面左上の「指定領域を拡大」（図55）を使って，その部分を拡大してみてください。
拡大した図は省略させていただきます。



（図55）

さて，次に，$y=2\sin\theta$，$y=\sin 2\theta$ といったグラフがでてきています。ここのところも GRAPES が最も得意とするところでしょう。私自身の授業展開ですが，本書 p.1 でも述べましたように，ここのところは，必ず全員コンピュータ学習室にてパラメータの役割を考えさせる形をとっています。

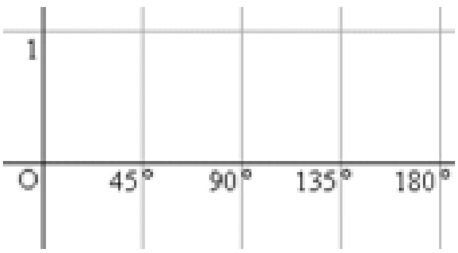
使用するのは，図 56 の GRAPES ファイルです。



（図56）

教科書に沿った説明をきちんと行おうと思えば，本来は，弧度法ですべて作るべきところです。しかし，「位相のずれ」などは，やはり度数法で当初，理解するほうがわかりやすいと考えてこの形にしています。このGRAPESファイルは作成時にまず，全体を度数法にします。画面の上側にあるオプション（ここにマウスを持っていくと「各種設定」と表示されます）をクリックし，度数法のボタンを押してOKを押します。ここのところは，No.29 の p.22 を参照してください。

しかし，ここまででは，x 軸の目盛が図57のように45 °きざみになっています。



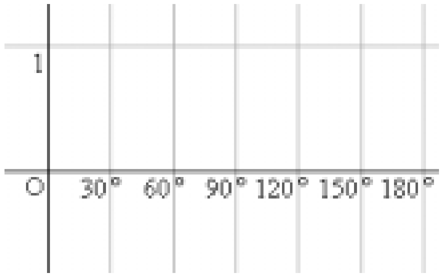
（図57）

45 °きざみでも良いといえば良いのですが，30 °，60 °きざみになっていたほうがなんとなく使いやすい感じがしています。そこで，図 58 のように，画面上側の「目盛を狭くする」をクリックします。

（図58）

この右側にあるのが，「目盛を広くする」になります。45 °きざみが必要となった場合には，こちらをクリックします。

さて，この「目盛を狭くする」をクリックした状態が，図 59 です。



（図59）

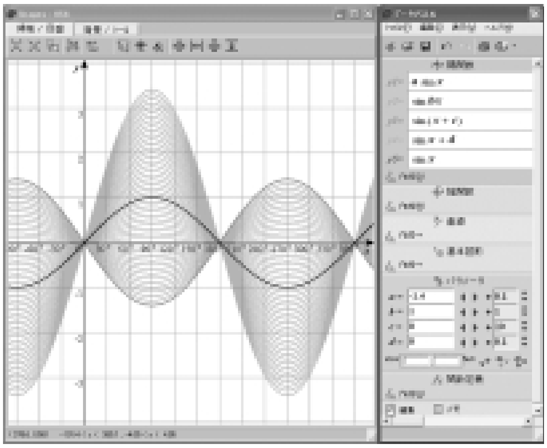
ここまでの設定により，図 56 の GRAPES ファイルを作成しました。

$y1=a\sin x$，$y2=\sin bx$，$y3=\sin(x+c)$，$y4=\sin x+d$ とし，a，b，c，d のパラメータに関して，$y5=\sin x$ と同じになるように $a=1$，$b=1$，$c=0$，$d=0$ と数値をおきました。また，a と d の増加量に関しては，「+0.1」で良いかと考えました。しかし，b の増加量に関しては，「+1」としてみました。そして肝心なのは，c のパラメータです。ここは，位相を示すところです。しかもこの数値自体が変化の量を表します。「+1」程度では，変化の様子がはっきりと出てこないので，「+10」としてみました。また，陽関数の $y5$ のところには，$y5=\sin x$ を入れました。原型との変化の様子を見るには必ず必要だからです。さあ，これで授業の準備はできました。生徒たちには，a，b，c，d の各パラメータの変化の様子を書くプリントも用意してあります。しかしここで，いきなり GRAPES を作動させては生徒たちはゲームを見ることになってしまいます。そこで，その動きを予想させましょう。数学教育学でいうところの「見積もり」とでもいいましょうか。やはりどうなるかを考えてみてそして，

考えたものと実際のものとの差の違いの部分が「面白さ」や「なるほど」を感じることができる箇所だと思います。ここのところをどう持っていくかは，授業担当者の話術や語り口，身振り手振りにかかってくるかと思います。

さて，生徒たちの予想のあと，１つひとつのパラメータの変化を見ていきましょう。

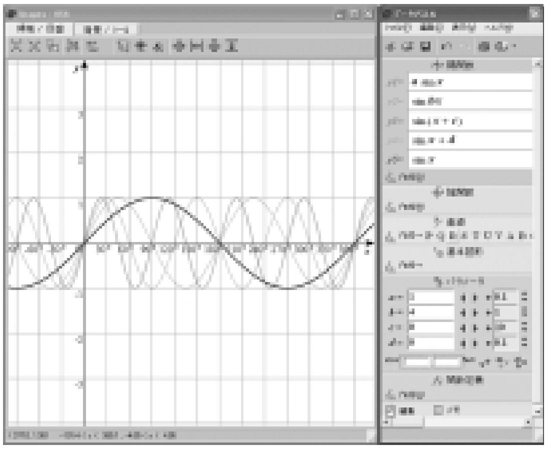
まずは，aからです（図60）。



（図60）

図60では，残像にチェックを入れましたが，生徒たちに見せる際には，最初はチェックは入れないで，動きをある程度見せた後で，残像を表示するようにしたほうがベターなようです。また，当然のことですが，$a=0$の際には，たんに横一直線の$y=0$になってしまうことがきちんと表示されるのも，GRAPESならではです。たいへん意味のある$a=0$ということになります。

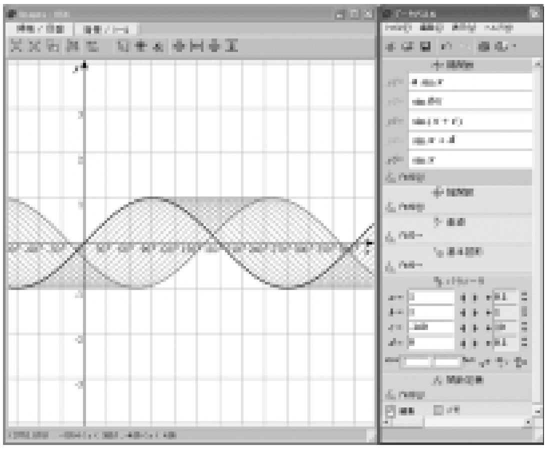
次にbのパラメータを見てみます（図61）。
まず，パラメータの増減を「+1」にした理由ですが，周期が変わる際，整数にして，$\dfrac{360^\circ}{b}$の数値が周期になることを実感させたかったのです。しかし，ここが整数だと，「カクカク動く」と言いますか，なめらかな動きにはなりません。どうぞ，必要に応じて，bのパラメータの増減を「+0.1」に戻してみてください。今度は，なめらかに動かせることができると思います。また，bが0のとき，横一直線になることや，bがマイナスの場合もはっきり見えるのもGRAPESのおかげです。



（図61）

上の図61も，変化の様子を見せるという意味で残像にしています。実際の授業では，どうぞ，扱いやすいように修正してください。

次にcのパラメータを見てみます（図62）。

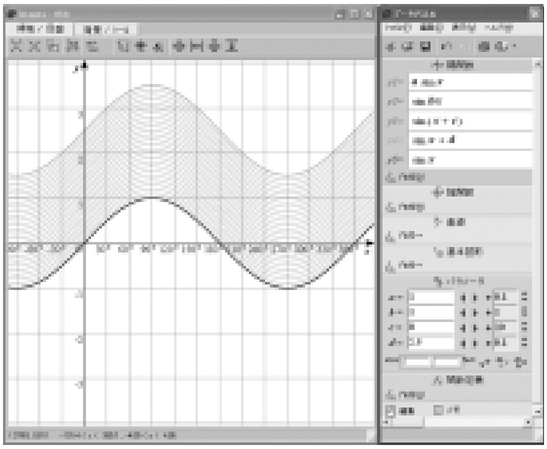


（図62）

パラメータの増減を「+10」にしていますので，たいへん綺麗に見えています。ここも，$(x+c)$の形をとっていますので，cの数値を増やせば増やすほど左へずれていき，逆にcの数値を減らせば減らすほど右へずれていくのが，わかるかと思います。これなどは，まさに，数学Ｉの２次関数の平行移動のところの復習と関連づけて説明できる絶好のチャンスです。ちょっと話はそれますが，私はかねがねこの２次関数の平行移動のところは，$y=a(x-p)^2+q$ではなく，$y=a(x+p)^2+q$とおくべきと考えています。または，$y-q=(x-p)^2$とかです。さまざまな式がでる中で，$y=a(x-p)^2+q$には不自然さを感じており，$y=a(x+p)^2+q$とおいて

GRAPESでの動きを感じながら，生徒たちがグラフを読みとってくれたらと感じています。このところは，No.29のp.2〜3をぜひとも参照してください。

さて最後にdのパラメータを見てみます（図63）。



（図63）

ここのところは，y軸にそっての平行移動ですので，あまり難しくないでしょう。

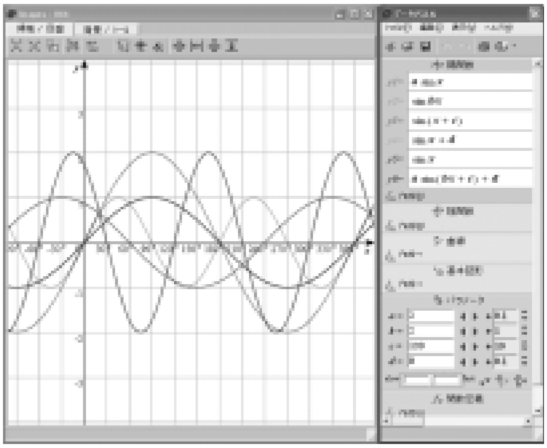
さて，「これらのパラメータがどんな意味をもっているかを１つひとつ文章にしてみよう」と，一般化の文章を書かせてみたのですが，これがなかなか難しかったです。しかし，図にして説明できればなかなかのもので，生徒たちは，それなりに各パラメータの意味を把握できたようです。

さて，このように，たんにパラメータが１つだけついている場合は，まだ良いとして，次のような問題に出会うことがあります。

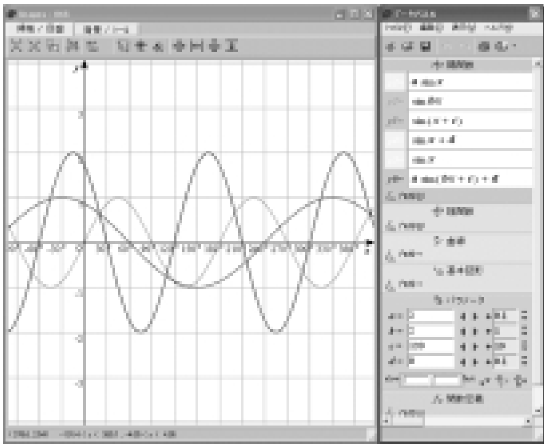
『高等学校数学Ⅱ』p.105演習問題の６番

「関数 $y=2\sin\left(2\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の周期を求めよ。また，そのグラフをかけ。」

そこで，図56の$y1$〜$y4$をすべて盛り込んだ形を$y6$としたGRAPESファイルが，図64です。すなわち$y6=a\sin(bx+c)+d$です。そして，上記の問題の各パラメータに数値を合わせます。$a=2$，$b=2$，$c=120$です。しかし，これでは，画面があまりにゴチャゴチャしすぎていますので，まず，パラメータaとdに関する$y1$と$y4$を非表示にします。さらに，基本的な$y=\sin x$を示している$y5$を，$y3$の周期が短くなってるグラフとの確認をしてから，非表示にします。それが図65です。ここは，

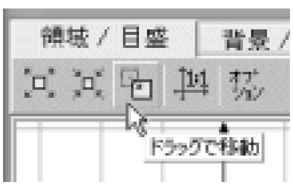


（図64）



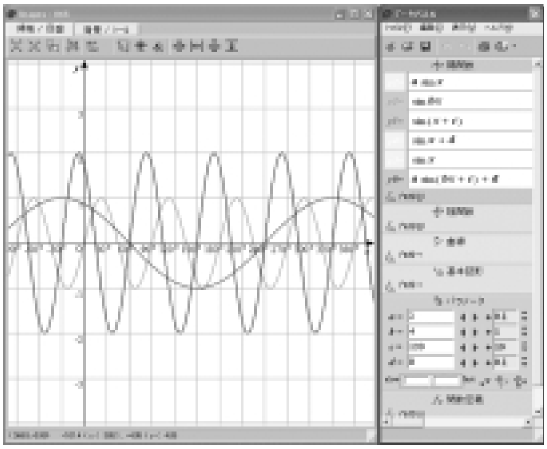
（図65）

ぜひとも，パラメータを動かしながら説明してあげてください。完成品は$y6$の式です。色を使っていればわかると思います。さてまず，bは2なので，周期は$\dfrac{360°}{2}=180°$であり，$y2$のグラフも$y6$のグラフもそうなっています。そして，注目すべきは，cの値です。たんに120°と考えずに，プラス120°と考えさせてみてください。$y3$のグラフが，「左」へ120°ずれています。GRAPESは，はみ出た部分が見やすいように画面全体を「ドラッグで移動」という機能も持っています（図66）。



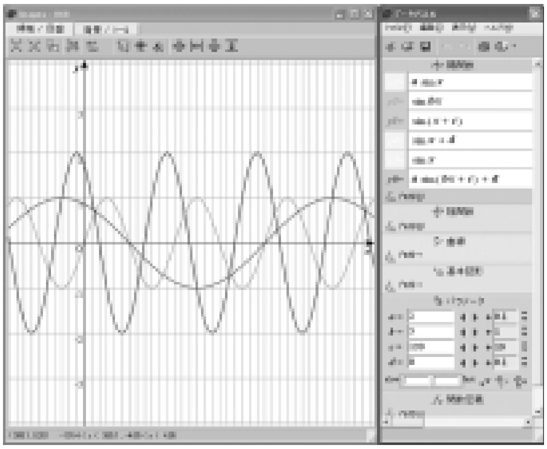
（図66）

ここをクリックして，左側に寄せて sin カーブのグラフの始まりが，$-120°$ の位置になっていることを確かめてもいいかと思います。しかし，ここは，ぜひ，$240°$ からグラフが始まっていることで，周期関数という意味合いからも説明できるほうが生徒たちも納得するかと思います。そして，ここで，$y6$ のグラフが，$-60°$ から始まっていることを確認してから，$2\sin(2x+120°)$ を $2\sin 2(x+60°)$ と変形したものだということを確認していただきたいと感じております。そう，ここで，カッコの中は，$2x+120°$ という形なので，b の値を4にしたらどうなるかと発問してみてください。生徒たちは容易に $4x+120°$ を $4(x+30°)$ に変形するでしょう。そして，「周期が $\frac{360°}{4}$ で，$90°$ になって，左へ $30°$ ずれるはず」という答えが返ってくるかと思います。そこで，b の値を4にしてみましょう。
それが，図67です。



（図67）

生徒たちからの答えが，まさにそのようになりました。こんな感じでGRAPESを使用していくと，生徒たちのほうも，楽しさを見つけだしていきます。さて，先ほどのところで，b の値を3にしてしまうと，$3x+120° = 3(x+40°)$ となり，$40°$ という数値がでてきてしまいます。グラフの目盛は $30°$ きざみなので，やや半端なところを通過することになってしまいます。そのときは，p.20（図58）の「目盛を狭くする」を２回クリックします。すると，$10°$ きざみの縦線が示されます。もちろん，x 座標の数値は表示されなくなりますが，$40°$ という数値できちんと通過していることを確認するには

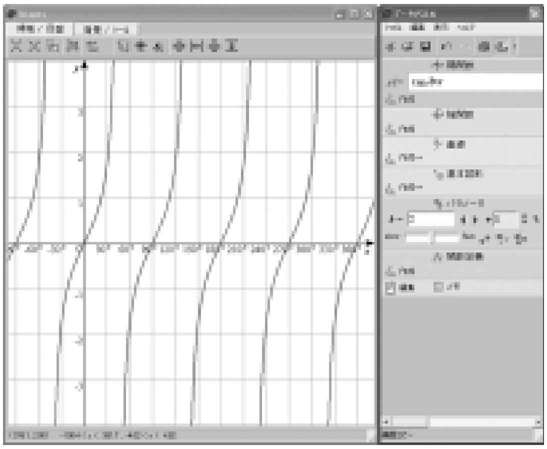


（図68）

それも，１つの方法です。図68に，b が3のときの状態を示します。この図では，ちょっと見づらいかもしれませんが，間違いなく，$-40°$ のところを通過しているのが，確認できます。

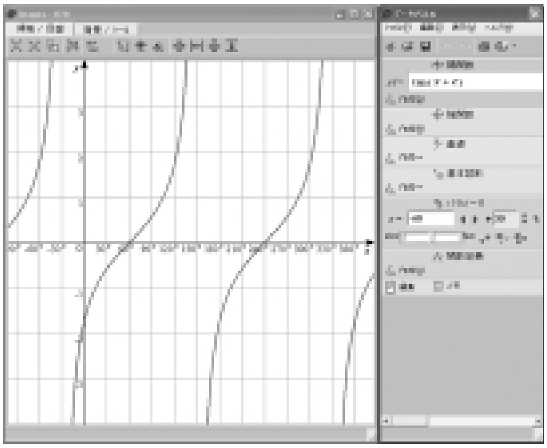
さて，次は，cos ということになりますが，cos は，sin とかなり似ていますので省略させていただきます。

次は，tan のグラフです。tan のグラフは，その形ゆえか，sin や cos のようには扱われていません。究極の形，$y=a\tan(bx+c)+d$ で言えば周期に関してのb，そして，位相に関するcあたりの扱いだけでしょうか。しかも，c を扱うとき，bは1であることが多いようです。あくまでtanに関しては，周期を重点的に指導していくことが重要なようです。さて，ここで，$y1 = \tan bx$ として，$b=2$ とした図69を示します。増加量を「+1」として周期が $180°$ をその数値で割ったものがすぐに表示できるようにしてあります。



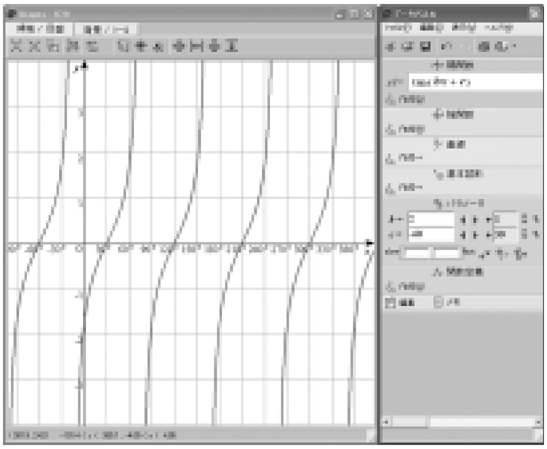
（図69）

また，$y1=\tan(x+c)$として，$c=-60$とした図70を示します。



（図70）

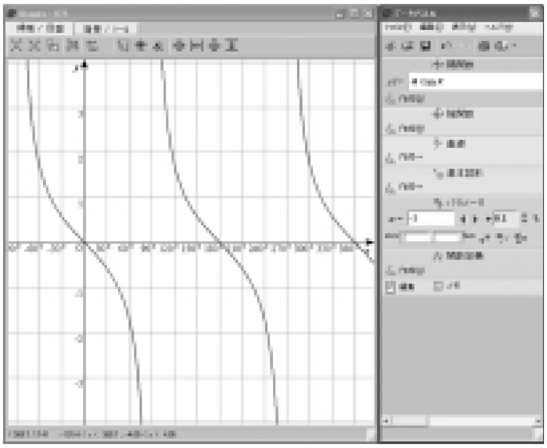
グラフが+60°から始まっているのがわかります。また，ここでは，増加量を「+30」としてありますので，ワンクリックごとに，グラフ全体が，30°ずつ，右または左に動くのが確認できます。tanに関しては，これだけのようですが，さらに興味を持った生徒には，ぜひ，究極の形，$y=a\tan(bx+c)+d$を用いて，各パラメータの変化による考察をさせてあげください。以下に，その一部分の$y1=\tan(bx+c)$で$b=2$，$c=-60$の状態を示します（図71)。



（図71）

結局のところ，$b=2$により周期が $\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$

そして，$2x-60^\circ=2(x-30^\circ)$ということで，グラフが右へ30°だけずれているのがわかります。これなども，sinやcosと，同じように考えることができることの確認となります。また，教科書にはtanの前にaのようなパラメータがつく問題はでていないようですが，aがマイナスになった場合は，それこそ，「裏返し」のグラフの形になる面白さがあります。（図72）



（図72）

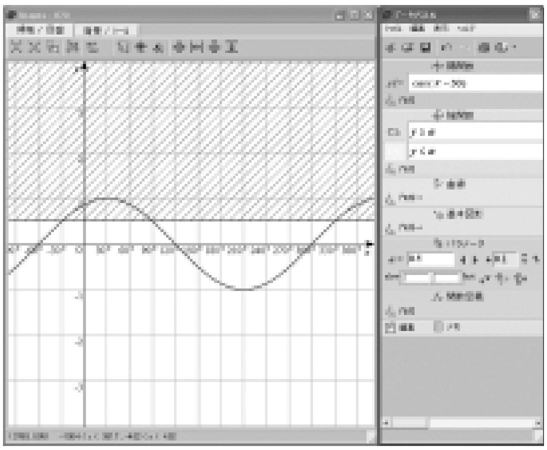
そしてまた，当然ですが，$a=0$の時は，横一直線のx軸そのものになってしまいます。これなども，aの数値を1から0.1きざみに下げて行ったときに一瞬発生するものですが，そこを通過して，グラフが裏返しになる様子を確認することができます。

さて，次に角の範囲に関する問題が出されています。『高等学校数学II』p.103例題9

「$0\leqq\theta<2\pi$のとき，次の不等式を満たすθの値の範囲を求めよ。

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$$」

これをGRAPESで表してみたものが，図73です。



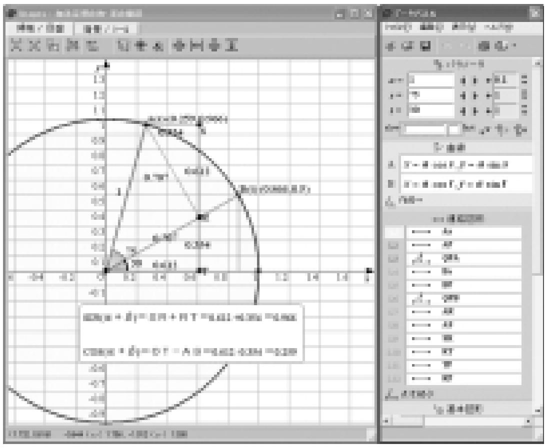
（図73）

陰関数で，大小関係を両方作ってしかもaというパラメータにしているところがコツです。

● **加法定理**（教科書 p.98）

次にここは，加法定理についてのところですが，みなさんは，どのように授業していらっしゃいますか。まずは，証明からです。加法定理に関しては，それこそ，多くの証明方法があるわけです。インターネットがこんなに普及していなかったころは，生徒たちに宿題として出して，いろいろと考えさせたり，熱心な生徒は図書館へ行って調べて，持ってきたりとしたものです。最近は，それこそインターネットの検索で，「加法定理」とやればかなりのものが出てくる時代となってしまいました。授業に少し時間的余裕があれば，「この授業中に考えてみよう」とやりたいところですが，なかなか時間がとれないのが現実です。

さて，私が授業中によく説明として使用しているものをGRAPESにしてみました。図74です。



（図74）

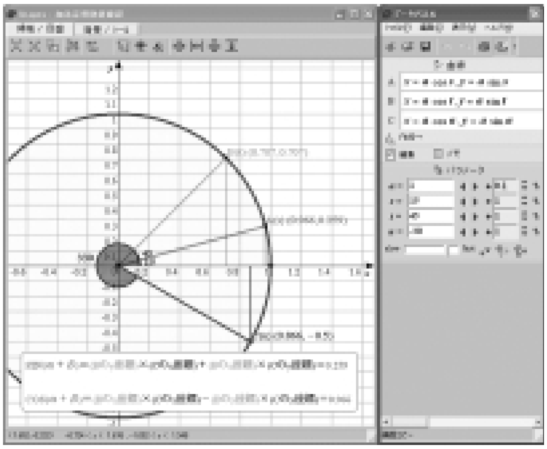
この誌面上の説明では，やはり見づらいでしょうから，ぜひダウンロードしてファイルを開いてからこの本誌と照らし合わせてください。

図は中心角α（ここでは30°）に，中心角β（ここでは45°）が乗っかって中心角α＋β（ここでは75°）の図形ができているところです。中心角α＋βのsin，cosは，点Aの座標で示されることになります。ここで，点Aから直線OBに垂線をひき，交わった点をRとします。ここで，線分OAが1ですので，AR=sinβ，OR=cosβとなります。また，△ROTと△ARSは相似ですので，∠ARS=αとなり，SR=sinβcosα，RT=cosβsinαです。同様に，OT=cosαcosβ，AS=sinαsinβとなります。よって，ここに示されている図より，

sin(α＋β)=SR+RT=sinβcosα+cosβsinα

cos(α＋β)=OT－AS=cosαcosβ－sinαsinβ

となり，これが点Aの座標の数値と一致するというわけです。また，これは，βがマイナスの状態のsin(α－β)やcos(α－β)でも確認することができます。画面下側の計算式表示の部分には，プラスとマイナスが並んでしまったり，またマイナスが２つ並んでしまったりすることが起きるかもしれませんが，まあそれも良いものです。しっかりとマイナスの数値を示していることが確認できます。さて，これらの確認が終わりましたら，次は具体的な数値の図75です。

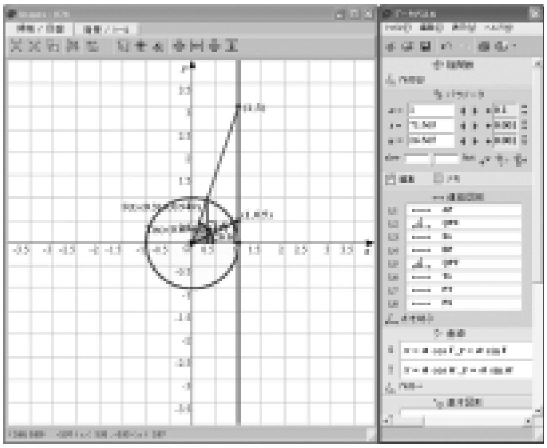


（図75）

図75では，45°－30°=15°の様子を示しています。ここは，ぜひ，カラーで見ていただきたいところです。それぞれのx座標，y座標に対応するように色を変えてみました。

● **２直線のなす角**（『高等学校数学Ⅱ』p.109）

いわゆる加法定理の応用として，直線の傾きをtanで表し，その角度の差α－βをtanの加法定理を使って求めるというものです。本書p.15の「直線の傾き」のところでも述べましたが，tanの数値で，ぴったり整数になるのは，45°とか135°の時しかなく，あとは「tan=いくつ」とおいて加法定理に入れて出すしかありません。さて，その様子をGRAPESに入れてみたのが図76です。tanの点を２つ取るもので対応しています。問題文としては，「２直線$y=3x$, $y=\frac{1}{2}x$のなす角θを求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$とする。」となっています。



（図76）

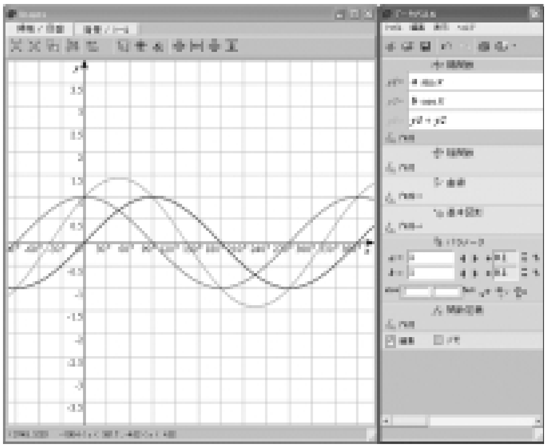
今回，この GRAPES ファイルはパラメータの増減を，いわゆる「めいっぱい」の「+0.001」としました。そして，$x=1$ の y 座標がちょうど，3 や 0.5 となるように，パラメータの数値を調整していきました。図 77 をご覧ください。

（図77）

それにより，それぞれの角度を表すパラメータの数値が，71.565 と 26.565となり，その差が 45 ということで，確認ができたしだいです。そして，これも，当たり前のことではありますが，ちょうど，それぞれのグラフの傾きと一致していることがグラフの目盛から確認することができます。

●三角関数の合成（教科書 p.103）

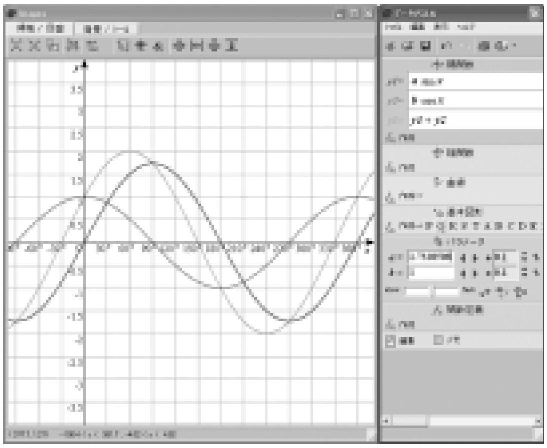
まずは図 78 を，ご覧ください。まず単純に，$y1 = a\sin x$，$y2 = b\cos x$としました。そして GRAPESのすごいところは，ここで，$y3=y1+y2$ と入れるだけで，合成したグラフを描いてしまうところです。これは，本当にすばらしいと思います。そして，今回は y 軸の目盛をさらに細かくし 0.5きざみとしました。これにより，



（図78）

$\sin x+\cos x = \sqrt{2}\sin(x+45°)$の一番盛り上がっているところの数値がほぼ 1.5 の下を通過しているのが確認できると思います。そして，+45 °から x 軸を通過しているのが，ちょうど－30 °と－60 °の間，すなわち－45 °であることも，確認することができます。

これを使って，いろいろと動かしてみましょう。図 79 をご覧ください。



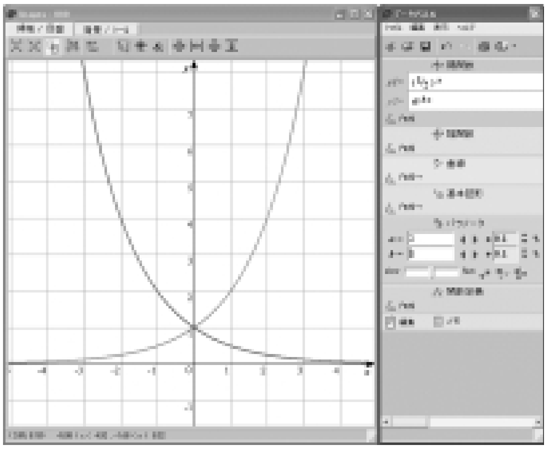
（図79）

これは，$\sqrt{3}\sin x+\cos x$ の様子を示しています。さて，パラメータはの増減量は，通常は「+0.1」で，めいっぱいは前述のとおり「+0.001」です。$\sqrt{3}$ を1.7としたのでは，微妙にずれてしまいます。そこで，今回は，a =のところに，直接入力の形で 1.7320508 と打ち込みました。すると合成した $y3$ のグラフが見事に－30 °を通過しました。このように，数値がわかっている場合は，直接入力できるのも GRAPES の大きな魅力です。

● **指数関数とそのグラフ**（教科書 p.113）

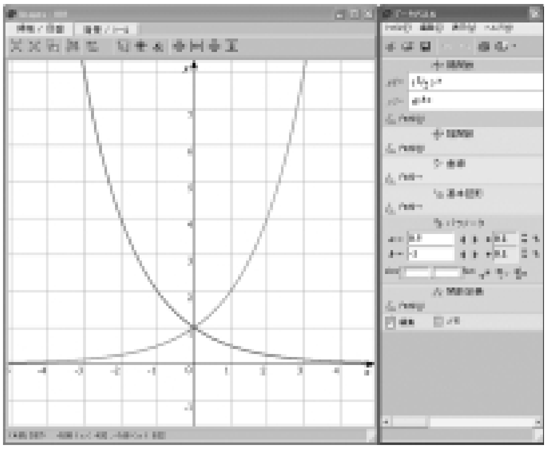
指数関数のグラフのところですが，何と言っても生徒たちに定着させたいのは，底が $0<a<1$ の場合と，$a>1$ の場合の違いでしょう。もちろん，ここのところも，私は授業で A3 のグラフ用紙を使って，実際に描かせてから GRAPES で見せるようにしています。そして手でかかせる際には，皆さんもそうされている方が多いかもしれませんが，$y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の両方の「基本のグラフ」を１枚の紙に描かせるようにしています。もちろん y 座標を広くとるよう x 軸，y 軸とするところは，こちらで指定します。また，点と点との間隔が大きくあいてしまうところ（$x=4$ と $x=5$ の間）などは，グラフ電卓を配布して，関数電卓として使用させて点をプロットするようにしています。例えば，$2^{4.5}=22.627$ などです。生徒たちも，これがあると，点と点の間をきちんとプロットできるのでグラフの外形がはっきり見えてきて安心します。さて，そのあとに見せる GRAPES ファイルですが，まず始めには，基本どおり $y=a^x$ を見せましょう。いきなり立ち上げると，横一直線の $y=1$ のグラフが示されます。これが $a=1$ の場合です。横一直線なので指数関数ではないというわけです。このあと，a の値をいろいろと変化させてみてください。$a=1$ を境にして，グラフの形が大きく変化します。教科書とかではたんにグラフが分けて描いてあるわけですが，GRAPES を用いて，連続的な変化を見せましょう。さらには，a がマイナスの場合も GRAPES は表示してくれます。確かに整数値のところしか，点が存在しないということがわかります。なにはともあれ，実際に操作してみてください。

さて単純に $y=a^x$ として見せたあとには，$y=a^{bx}$ として，見せるのがコツです。この段階では，すでにグラフに入る前の指数法則の授業は終わっています。そこで，$y=2^{-x}$ と，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ が同じになることをぜひ確認したいのです。図 80 をごらんください。$y1=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ として，$y1=a^{bx}$ としているところです。まず，$y1$ を非表示にして，$y2=a^{bx}$ の a，b をいろいろと変化させてみてください。ここで驚くことは，底が $a>1$ のとき，b の値がマイナスになった瞬間，グラフがさきほどの「基本のグラフの底が $0<a<1$ のもの」と同じになるということです。考えてみれば当たり前のことですが，実際に



（図80） $a=2$，$b=1$

動的シミュレーションとして目で見ることは，大きな印象として残ります。そしてここでさらに，底を $0<a<1$ とすれば，同様に「基本のグラフの底が $a>1$ のもの」と同じになるということも同時に確認することができます。図 81 をごらんください。



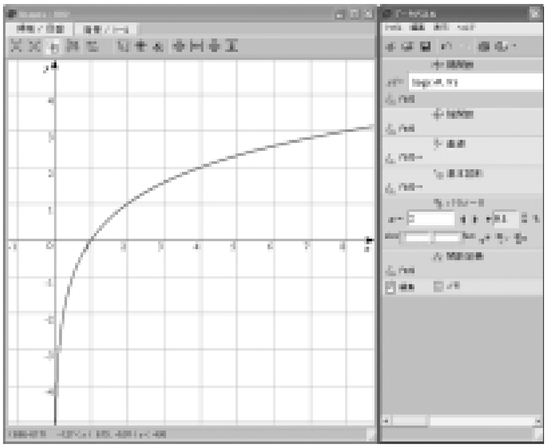
（図81） $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$

図 80 と全く同じグラフになりました。が，a，b の値が大きく違っています。「なぜそのようになるのか」に関しては，ぜひ生徒に説明をさせたいところです。

● **対数関数とそのグラフ**（教科書 p.121）

ここのところでも，また A3 のグラフ用紙の登場です。もちろん描かせるのは，$y=\log_2 X$ のグラフと $y=\log_{\frac{1}{2}} X$ のグラフです。今度はもちろん x 座標を広くとるように座標の位置を決めます。そし

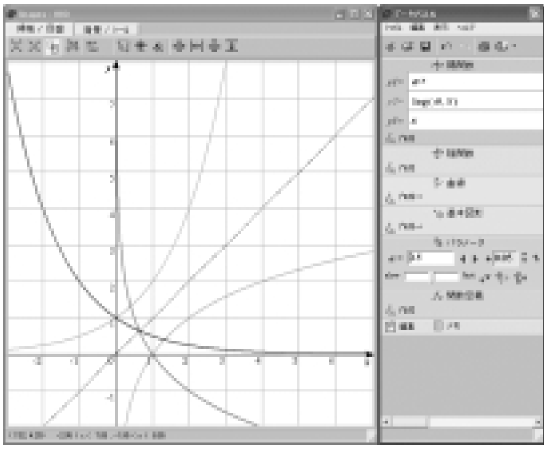
てまた，グラフ電卓を関数電卓のように用いて，例えば，$\log_2 20$ などの数値を求めさせます。しかし，多くの関数電卓には，$\log_a b$ を一発で計算してくれる機能はついていないようです。そこで，底の変換公式の利用ということになります。さて，手で描いたグラフが完成しましたら，早速GRAPESファイルを見せましょう。GRAPESには，しっかり$\log(a,\ x)$と入力することで，$\log_a X$ を表示してくれる関数が用意されています。ここで a が $0<a<1$ の場合と，$a>1$ の場合の違いを確認しましょう。ここで，面白いのは，入力した直後は，グラフが何も表示されないことです。GRAPESでは，パラメータの初期値は1なので $a=1$ となり底が1の状態が発生してしまい何も表示されないのです。ここらへんも，生徒たちになぜだろうを聞いてみると面白いかと思います。



（図82）

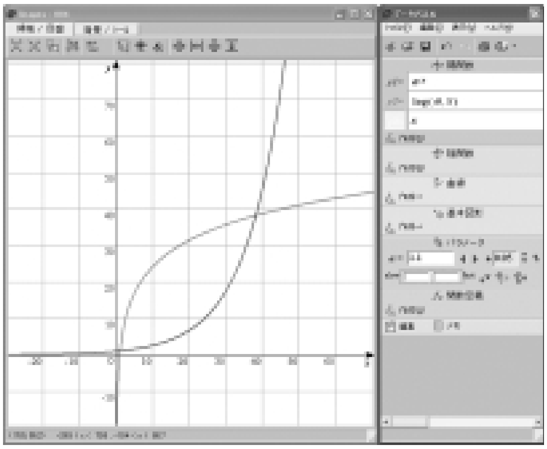
図82では，a が無事2となったので，グラフが発生しています。ここも，a のパラメータが，1を境にして，グラフの形(向き)が大きく変わることに着目させたいところです。

さて，このあと，指数関数のグラフと対数関数のグラフの関係についての話がでてきています。実は授業中，対数関数のグラフを描かせている場面では，数名の生徒が指数関数のグラフを利用して描き始めます。指数関数のグラフを裏返しにして，90°傾ければそれが対数関数のグラフになっているからです。両方のグラフを描かせたときに，底をそろえたのもここに気づいてもらいたかったからです。そして，気づいた生徒たちに，$y=a^x$と，$y=\log_a X$ について，どのような関連があるかを考



（図83）

えさせるといいかと思われます。図83をご覧ください。教科書ででていることを確認するためのGRAPESファイルです。$y1=ax$，$y2=\log_a X$，$y3=x$ です。例によって $y3$ は，非表示にしておくと良いでしょう。そしてここで，パラメータの増減量を「+0.05」としました。「+0.1」では，早く動きすぎしまいちょっと見づらいを感じたからです。さて，ここでまた面白いことを発見することになります。底がある範囲のとき，両方のグラフで囲まれる部分ができるということです。図84をご覧ください。この画面は，見やすいように，x座標とy座標の数



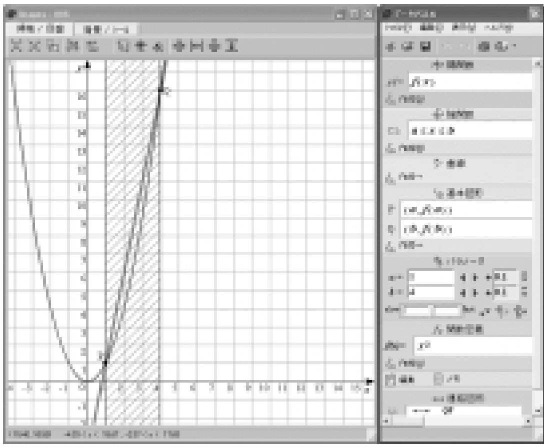
（図84）

値を大きくとっています。a の数値がプラスになった瞬間から囲まれた範囲が発生します。そして，a の値をどんどん大きくしていくと，ある数値で両方のグラフは離れました。0.05きざみで増やしましたので，離れたことが確認できた数値は，1.45でした。勘の良い生徒ならその理由も納得でしょう。

(3) 微分・積分の考え

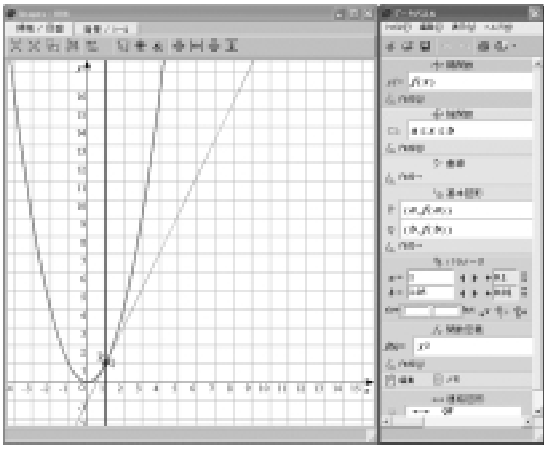
●平均変化率（教科書 p.132）

微分の最初にでてくる平均変化率のところです。そもそも，グラフの傾きに関して忘れている生徒も多いところです。再度，傾きそのものを確認する意味でも重要なところです。図85をご覧ください。



（図85）

まず，関数定義のところに，$f(x)=x^2$と入れました。そして，陽関数のところに，$y1=f(x)$と入れた形で$f(x)$を表示しました。これで関数定義の$f(x)$を変えるだけで，グラフの表示が変わってくれますのでたいへん便利です。2つの点 P と Q も，$(a, f(a))$，$(b, f(b))$とすれば，この$f(x)$上の点ということで，いろいろと動かすことができます。P と Q は，例によって，座標上の右クリックででてくる「点を結ぶ」で結びました。もちろん「線分」でなく，「直線」としました。また，陰関数のところに，$a \leqq x \leqq b$ を入れて微分係数を求める際の$f(a+h)$のhの部分を表してみました。最初の平均変化率の説明の際は，ここは非表示にしておけばよいかと思います。そして，画面をご覧になればおわかりのように座標目盛を通常の倍にして，原点を左下に持ってきています。いま，画面上では，点 P(1, 1)と点 Q(4, 16)が結ばれていますので傾きが，$\dfrac{16-1}{4-1}$ で，5となっています。この傾き5がしっかりと座標から読みとることができるのがすばらしいところです。そして点 Q を徐々に点 P に近づけていきましょう。すなわち，パラメータbをどんどん小さくしていきましょう。そして，aにかなり接近したところで，bの増減量を「+0.1」から「+0.01」にしてみましょう。点 Q が点 P に「限りなく近づいていく」様子がわかるかと思われます。図86をご覧ください。

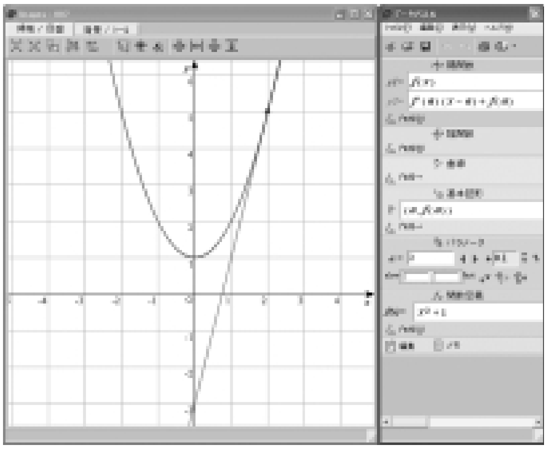


（図86）

bのパラメータが，1.05になった時点で P と Q を結んだ線を細くしたのです。図85では，わざと，傾きを見やすいように，かなり太い線で結んでいたのですが，b のパラメータが，1.05になると，もう傾きが2に見えてしまいます。そこでここで細い線に変えてみると，まだ(2, 4)に到達していないのがわかります。そして，さらにbのパラメータを1に近づけようとすると，この細い線が，(2, 4)に近づこうとしているのが確認できます。そして，bをちょうど1にすれば，この直線が消えます。さらに下げて0.99，0.98とすれば，(2, 4)から徐々に下がっていきますから，今度は逆に数値を上げることでここの意味がつかめるわけです。

●接線の方程式（教科書 p.141）

ここのところでは，微分係数がその点における接線の傾きの数値に一致していることを確認させるところです。図87をご覧ください。教科書 p.141の例5「放物線 $y=x^2+1$ 上の点(2, 5)における接線の傾き」という例題そのものを GRAPES ファイルにしてみました。GRAPES のすごいところは，微分した式の$f'(x)$や2回微分の$f''(x)$，そしてさらには，積分の$F(x)$も用意されているところです。図88参照。これらを式の中に入れることで，後述する積分を始め，かなり多くのことが可能となります。まず関数定義で関数を決めた後，$y1=f(x)$ そして$y2=f'(a)(x-a)+f(a)$と接線の式を入力します。また，点を動かせるように点Pを



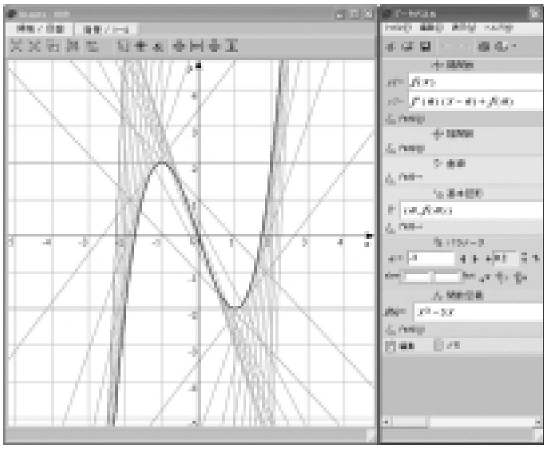
（図87）

（図88）

$(a,\ f(a))$としています。

図87では，教科書の例のように点が(2，5)になってしまっていますが，現実には，aの数値をいろいろと変えると，グラフに「沿って」接線が動く様子を見ることができます。どうも，この段階では，接線というと２次関数のグラフの接線が多く扱われています。しかし，この先，３次関数のグラフの接線なども登場してきますので，$f(x)$ を適宜変えてみて，接線というものをイメージさせたほうが良いようです。その際，あくまで接線は，平均変化率の２点とのかねあいであるという話をしながらになりますが。

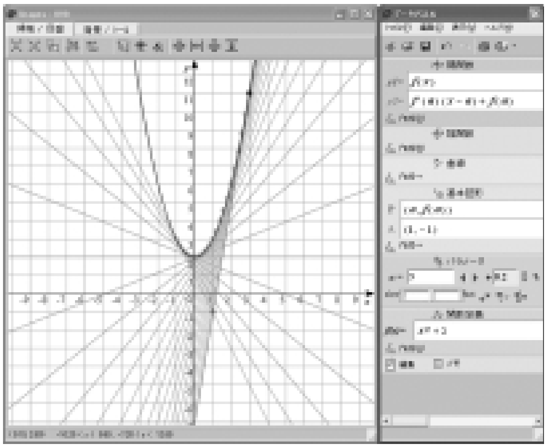
とくに極大値・極小値のある３次関数のグラフを例にだせば，接線のグラフそのものが，大きく波打つ感じを見ることができ，いかにも，グラフに「沿った」動きをしていることが見て取れます。ここのところに関しては，大切な印象づけとなると考えます。図89をご覧ください。



（図89）

$f(x)=x^3-3x$としたものです。実際には，残像を残さなくても接線がグラフに「沿いながら」動く様子をたいへんきれいに見ることができます。また，今回は誌面に載せる関係から残像を有りにしました。そして，パラメータの増減が「+0.1」では接線がさらに出過ぎてしまいましたので，「+0.2」としてみました。図89は，aを-3から３まで変化させたときの接線の残像ですが，これだけでも，かなり面白いことがわかります。$x=-1$や１の接線は横一直線ですし，平行になっている線も見ることができます。さて，話を図87に戻します。

$y=x^2+1$上の点(2，5)における接線ということで，微分した式$y'=2x$に２を代入して4。それが見事にこの接線の傾きになっていることをマス目を数えることで確認することができます。さらに，式を求めて$y=4x-3$とでてきた際のy切片の値もしっかり確認することができます。その後は，それこそGRAPESを用いて様々な例をだすと良いでしょう。それは教科書に「次の曲線上の点Ｐにおける接線の方程式を求めよ。」という問題がありますが，微分してでてきた式に，x座標の値を代入すればおしまいとなることへの警鐘です。生徒たちは機械的に作業を行うことになりますが，ここのところをしっかり押さえていると，次の曲線外の点を通る接線のところがたいへんやりやすくなります。教科書 p.143 の例題２「放物線$y=x^2+2$の接線のうち，点(1，-1)を通るものの方程式を求めよ。」という例題を GRAPES ファイルにしたものが図90です。これもわざと誌面で表現するために，残像有りにしましたが，実際の授業では，残像をなし

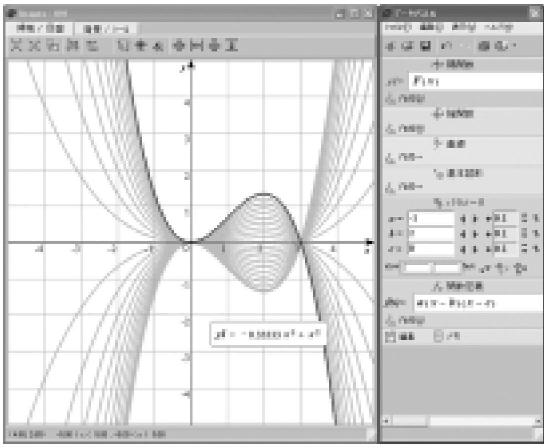


（図90）

にして点（1，－1）を通るもののみ残像を残し，「それがちょうど目的のグラフになっている」という形で持っていったほうがいいかと思います。

● 関数の極大・極小（教科書 p.146）

ここは，次のグラフを描く作業につながるところですが，このような形は，いかがでしょうか。以前に，関数定義で $f(x)$ を決めてあげると，$F(x)$ で積分した形がでてくる話をしました（積分定数はゼロになります）。そこで，$f(x)=a(x-b)(x-c)$ として，$y1=F(x)$ を表示させてしまうのです。



（図91）

図91をご覧ください。まず，$b=2$，$c=0$ としてみました。そして，a を1から－1まで下げたところです。$a=0$ を境にして0と2が極大と極小の立場が入れ替わるのを見ることができます。また，b と c の値を同じにすると極値のない状態を見ることはできますがご存じのように，微分係数がゼロの点が1つはできてしまいます。

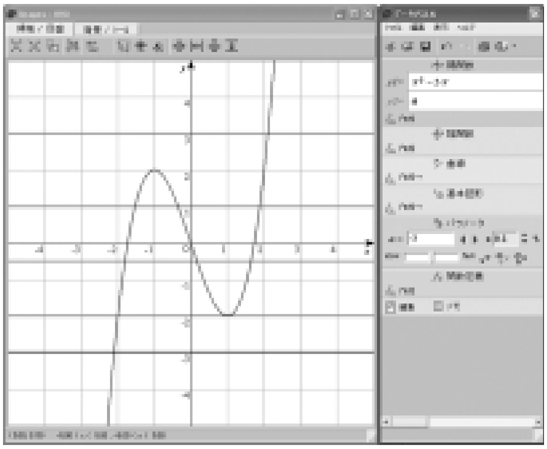
● 区間における最大・最小（教科書 p.148）

ここのところは，極大値・極小値と指定された関数の定義域との関係のところです。教科書 p.148 の例題6では「関数 $y=2x^3-3x^2-12x+8$ の区間 $-2\leqq x\leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ。」とされています。ここでGRAPESで $y1=2x^3-3x^2-12x+8(-2\leqq x\leqq 4)$ とおいてしまえばグラフは表示されます。しかし，ここも一工夫しましょう【No.29 p.11～12】。

$y1=2x^3-3x^2-12x+8(a\leqq x\leqq b)$ とおくのです。これにより，上記の参照のところのように，グラフが「にょきにょき」とはえてくる様子がうかがえます。とくに今回は，極大値と極小値を「発生させながら」の「にょきにょき」ですので，極大値・極小値を観察することができます。なお，GRAPESのパラメータの初期値は1ですので，式をおいた直後は点しか発生しません。お気をつけください。

● 方程式の実数解の個数（教科書 p.151）

ここのところは，GRAPESがないころでしたら，黒板に大きめにグラフを描いて，掃除の時に使うモップの柄を水平にして上下させたものです。図92をご覧ください。教科書 p.151の例題8「3次方程式 $x^3-3x-a=0$ の異なる実数解の個数」をGRAPESファイルにしたものです。



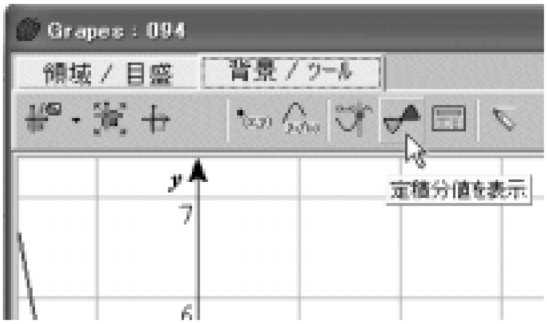
（図92）

$y=a$ のスライドにより3次関数との交点・接点の個数を確認することもできます。また，問題によって左辺が $+a$ となっているものについては，当然，全体にマイナスをかけて調整をするわけですが，その場合の $y=-a$ のグラフとの交点の数も

最終的に結果が一致することを確認したものです。

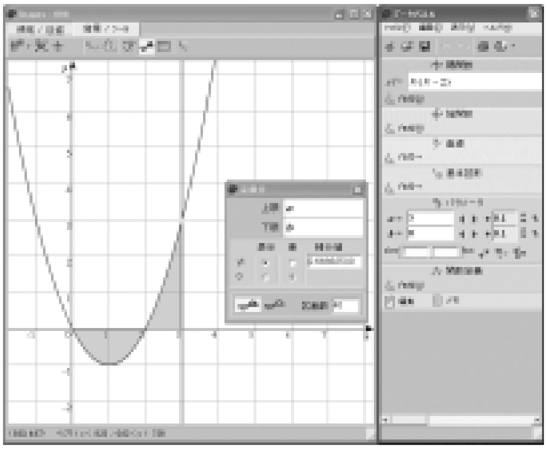
● **面積と定積分**（教科書 p.162）

ここのところは，定積分の計算と面積の関係のところです。GRAPES では，与えられた面積を最終的に分数での答はでないものの，小数での答をだすことができます。求めたい式を入れたあと画面上側の「背景／ツール」タブをクリックし，その中の「定積分値を表示」をクリックしてみてください（図 93）。



（図93）

すぐに，区間－1から1までのグラフからx軸までの面積の値が表示されます。そして図 94 をご覧ください。積分の上限，下限を入れられます。

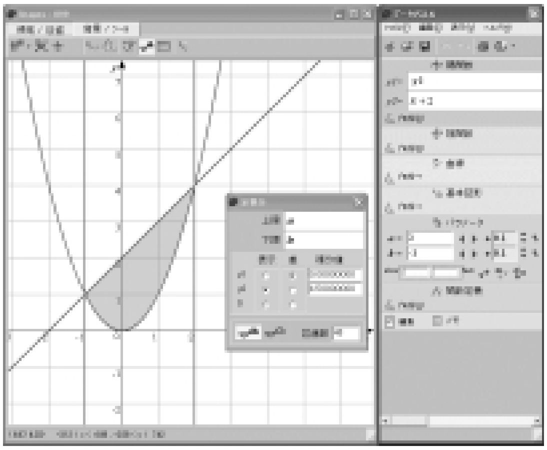


（図94）

当初，この上限・下限には，1と －1が入っているわけですがやはり数値よりもa，bのパラメータを入れたほうが面白いです。ここでちょっとしたアイデアですが，上限にa，下限にbとしましょう。普通の感覚ですと，下限aから上限bとしたいところですが，すぐ横にパラメータ表示があります。やはりインテグラルの横に書かれる数値の上下関係と一致していたほうがやりやすいようで，上限a，下限bとしました。このほうがイメージがつかみやすいです。

● **２曲線間の面積**（教科書 p.165）

ここのところは，グラフの上下関係を確認させるところです。図 95 をご覧ください。



（図95）

ここは，ちょうど正解が$\dfrac{9}{2}$になりますので，4.5 ときれいに表示されています。とにかく，いろいろとパラメータを動かして GRAPES に慣れてください。私以上に皆さんの多くが新しい発見をされることでしょう。

4 おわりに

かなりのかけ足で数学Ⅱの各分野に焦点をあて GRAPES の私なりの「ツボ」を書かせていただきました。先生方にしてみればもうすでにお気づきになっていらっしゃることばかりだったかもしれません。また私の言葉足らずでわかりにくい部分が多々あったかもしれません。これらの GRAPES ファイルはすべて「http://grapes.jp」に用意してあります。どうぞ皆さまの授業で，使用なさる先生がやりやすいように改造して使ってくださってかまいません。今後も黒板とチョークだけの授業では見えてこなかったことで，生徒たちの「へぇー」という驚きの顔を増やしていきたいと考えております。今後とも御指導のほど，よろしくお願い申し上げます。そして最後の最後になりましたが，すばらしいフリーソフト GRAPES の作者の友田先生にこの場を借りて心より御礼を申し上げます。本当に，ありがとうございます。